Harnack (Continued)

Θεώρημα (John-Nirenberg 1961)

$u \in W^{1,1}(\Omega)$, Ω κυρτό, και έστω $\exists\, K > 0$ τ.ω.

$$(1) \quad \int_{\Omega \cap B_r} |\nabla u| \leq K r^{n-1} \quad \forall B_r = B_r(x_0)$$

$\Rightarrow \exists\, \sigma_0 > 0,\ C_1$, που εξαρτώνται μόνο από το n, τ.ω.

$$(2) \quad \int_\Omega e^{\frac{\sigma}{K}|u - u_\Omega|} \leq C_1 (\operatorname{diam} \Omega)^n$$

$$u_\Omega := \fint_\Omega u$$

$$\sigma = \sigma_0 |\Omega| (\operatorname{diam} \Omega)^{-n}$$

Λήμμα.
Έστω $Lu \leq 0$, $u > 0$
$\exists\, p_0 > 0$, C, τ.ω.

$$(3) \quad I(p_0, r) \leq C\, I(-p_0, r)$$

$$\left(\Leftrightarrow \left(\fint_{B_r} u^{p_0} \right) \left(\fint_{B_r} u^{-p_0} \right) \leq C \right).$$

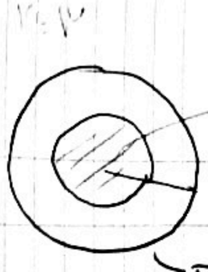
Απόδειξη Λήμματος

Ιδέα: Caccioppoli στην $\frac{1}{u}$:

Θα αρκέσταμε στο: $\Delta u \leq 0$ (ασθενώς), και $u > 0$

$\Updownarrow$

$$\forall \varphi \geq 0,\ \varphi \in C_c^1(\Omega) \quad \int \Delta u\, \varphi \leq 0 \Leftrightarrow -\int u_{,i} \varphi_{,i} \leq 0$$



$\eta \equiv 1$ στο B_ρ

$\eta \in C^1_c(B_{2\rho})$

$(*)\ |\nabla\eta| \leq \frac{2}{\rho}$

Επιλογή: $\varphi = \eta^2 \frac{1}{u}$,

(4) $\Rightarrow$

$$\int_{B_{2\rho}} u_{,i}\left[2\eta\eta_{,i}\frac{1}{u} + \eta^2\frac{1}{u^2}u_{,i}\right] \geq 0$$

(5) $$\int_{B_{2\rho}} 2\eta\,\eta_{,i}(\ln u)_{,i} \geq \int_{B_\rho}\eta^2|\nabla(\ln u)|^2$$

$\ln u$ κοίλη ως προς u, το αντίθετο

Young: $2\eta|\nabla(\ln u)||\nabla\eta| \leq \frac{C}{\varepsilon}|\nabla\eta|^2 + \varepsilon\,\eta^2|\nabla(\ln u)|$

Επιλογή: $\varepsilon = \frac{1}{2}$

(5) $\Rightarrow$

(6) $$\int_{B_{2\rho}}\eta^2|\nabla(\ln u)|^2 \leq C\int_{B_{2\rho}}|\nabla\eta|^2 \overset{(*)}{\leq} C\left(\frac{1}{\rho}\right)^2\rho^n = C\rho^{n-2}$$

$\eta \equiv 1$ στο B_ρ $\Rightarrow$

(7) $$\int_{B_\rho}|\nabla(\ln u)|^2 \leq C\rho^{n-2}$$

Κατά συνέπεια

(8) $$\int_{B_\rho}|\nabla(\ln u)| \leq C\left(\int_{B_\rho}|\nabla(\ln u)|^2\right)^{1/2}\rho^{n/2} \overset{(7)}{\leq} C\rho^{\frac{n-2}{2}}\rho^{\frac{n}{2}} \leq C\rho^{n-1}$$

(10)

Εφαρμόζουμε J-N στην $\ln u$, $\Omega = B_{4r}$

$w_\Omega := (\ln u)_\Omega$

$$\int_{B_{4r}} e^{\frac{\sigma}{\kappa}|\ln u - w_\Omega|} \leq \hat{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\Omega e^{-\frac{\sigma}{\kappa}(\ln u - w_\Omega)} \leq \hat{C} \quad (i)$$

$$\int_{B_r} e^{\frac{\sigma}{\kappa}(\ln u - w_\Omega)} \leq \hat{C} \quad (ii)$$

$$\therefore \left(\int_{B_r} u^{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)\left(\int_{B_r} u^{-\frac{\sigma}{\kappa}}\right) \leq \tilde{C}$$

$\square$