Μερος Γ (Ιδιοτιμες. Θεωρηματα Perron και Krein-Rutman) (3 Ασκησεις)

Ασκηση 1

Εστω $A=(a_{ij})$, $i,j=1,\dots,N$, $a_{ij}>0$, και $c=(c_1,\dots,c_N)\neq 0$ με $c_i \geq 0$.

Δειξτε οτι το οριο

$$v=\lim_{n\to+\infty}\frac{A^n c}{(\rho(A))^n}$$

υπαρχει, ειναι ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην ιδιοτιμη $\rho(A)$, και μοναδικο μεχρι πολλαπλασιασμο με σταθερα, πολλαπλασιαστη που εξαρταται απο το c.

#

Ασκηση 2

Θεωρειστε την Διαλεξη 25 (Perron και Krein-Rutman μερος 2), το αρθρο, και ειδικα την σελιδα 213. Ολοκληρωστε την αποδειξη:

(i) αλγεβρικη πολλαπλοτητα του λ ιση με μοναδα

(ii) $|\mu|<\lambda$ $\forall$ μιγαδικη ιδιοτιμη μ.

#

Ασκηση 3

Θεωρουμε τον ελλειπτικο τελεστη

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b^iu_{x_i}+cu \quad , a^{ij}(x),\ b^i(x),\ c(x).$$

Υποθέτουμε ότι

$$a^{ij}=a^{ji}, \qquad \langle A(x)\xi,\xi\rangle \geq \theta|\xi|^2, \quad A(x)=(a^{ij})$$

και επίσης ότι $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{U})$, U ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επίσης υποθέτουμε ότι

$$c \geq 0 \quad \text{στο } U.$$

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(D) \qquad \begin{cases} Lu=f, & x\in U \\ u=0, & x\in\partial U. \end{cases}$$

Το Θεώρημα του Schauder λέει ότι για $f\in C_0^{1,\alpha}(\bar{U})$ το (D) έχει μοναδική λύση u που ικανοποιεί την εκτίμηση

$$(*) \qquad \|u\|_{C^{2+\alpha}(\bar{U})} \leq C\|f\|_{C^{\alpha}(\bar{U})} \leq C_1\|f\|_{C^{1,\alpha}(\bar{U})}.$$

Ορίζουμε τον τελεστή

$$T: X \to X, \qquad X := C_0^{1,\alpha}(\bar{U})$$

$$Tf = u$$

$$G=\{u\in X \mid u\geq 0 \text{ στο } U\} \qquad (\text{Κώνος}).$$

Επαληθεύσατε ότι:

(a) T συμπαγής,

(b) $T(G\setminus\{0\}) \subset \operatorname{Int} C = \{u\in X \mid u>0 \text{ στο } U\}$.

Κάνοντας χρήση του Krein-Rutman αποδείξτε ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(\text{EVP}) \quad \begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi & \text{στο } U \\ \varphi = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$\exists\ \lambda = \lambda_1 > 0$ απλή ιδιοτιμή που αντιστοιχεί σε ιδιοσυνάρτηση $\varphi_1 > 0$, κ

Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{C}$ άλλη ιδιοτιμή του L, ισχύει

$$\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_1$$

#

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ