Κατ'οίκον Εξέταση - ΜΔΕ ΙΙ · 12 | 6 | 2024

Μέρος Α (Χώροι Sobolev)

(9 Ασκήσεις)

Άσκηση 1 $(q > p \geq 1)$

Έστω

$$g(x) = U(f)(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{L}^n(\Omega) = 1$$

Έστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

(1) $\left[\int_\Omega |K(x,y)|^r dy \right]^{1/r} \leq C_1$ (ανεξάρτητη του x)

(2) $\left[\int_\Omega |K(x,y)|^\sigma dx \right]^{1/\sigma} \leq C_2$ (—— " —— y)

(3) $q \geq p$, $q \geq \sigma$, $\left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' \leq r$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$

Τότε ισχύει ότι ο τελεστής $U : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ είναι φραγμένος με

(*) $$\|U\| \leq C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}} \, C_2^{\frac{\sigma}{q}}$$

Δείξτε την (*) δικαιολογώντας λεπτομερώς τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα Ι

$$|g(x)| \leq \left[\int_\Omega |K(x,y)|^\sigma |f(y)|^p dy \right]^{1/q} \left[\int_\Omega |f(y)|^p dy \right]^{\theta_1} \left[\int_\Omega |K(x,y)|^{p'\left(1 - \frac{\sigma}{q}\right)} \right]^{\theta_2}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad \theta_2 = 1 - \frac{1}{p}$$

Βήμα ΙΙ

$$\leq \left[\int_\Omega |K(x,y)|^\sigma |f(y)|^p dy \right]^{1/q} \left[\int_\Omega |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}}$$

$$= \left[\int_\Omega |K(x,y)|^\sigma |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{p}{q}} C_1^{1-\frac{\sigma}{q}}$$

Βήμα III

$$\|g\|_{L^q(\Omega)} \le C_1^{1-\frac{\sigma}{q}} C_2^{\frac{\sigma}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

#

Άσκηση 2

Δείξτε ότι ο τελεστής U εξακολουθεί να είναι φραγμένος $L^p \to$ αν

(i) η υπόθεση $q \geq \sigma$ ΔΕΝ ισχύει

(ii) η υπόθεση $q \geq p$ ΔΕΝ ισχύει αλλά αντικαταστάθει απ την

$$p'\left(1-\frac{\sigma}{p}\right) \le r$$

(iii) Δείξτε ότι για $p=1$ ο τελεστής

$$U : L^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

είναι φραγμένος κάτω από τις εξής τροποποιήσεις:

$$(1)' \quad \left(\int_\Omega |K(x,y)|^q dx \right)^{1/q} \le C_2$$

μαζί με την (2) για $\sigma = q$.

Το συμπέρασμα είναι $\|U\| \le C_2$ και η απόδειξη απ

(iv) $q=\infty$. Σε αυτήν την περίπτωση $U : L^p(\Omega) \to L^\infty($

αν η (1) ικανοποιείται για $r \geq p'$. Το συμπέρασμα $\|U$

Άσκηση 3

Δείξτε την ανισότητα

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$\mathcal{L}^n(\Omega)<\infty$, $p\le n$, $(n-p)q<np$

δικαιολογώντας λεπτομερώς τα εξής βήματα:

Βήμα I

Για $u\in C_0^1(\Omega)$ ισχύει η

$$(**) \qquad |u(x)| \le \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_1)}\int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \qquad \left(\begin{array}{c} B_1=\{|x|<1\} \\ \Omega\subset\mathbb{R}^n\end{array}\right)$$

Βήμα II

Εφαρμόστε στην (**) την Άσκηση 1

$$\left(g(x)=\int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy, \quad |u(x)|\le g(x) \right)$$

Άσκηση 4

Υπενθυμίζουμε τα δύο κριτήρια συμπάγειας:

Arzela-Ascoli

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, φραγμένο. Ένα υποσύνολο $S\subset C(\bar\Omega)$ είναι σχετικά συμπαγές ως προς την $\|u\|=\max_{\bar\Omega}|u(x)|$ αν και μόνο αν είναι φραγμένο και τα στοιχεία του S είναι ισοσυνεχή.

M. Riesz - Tamarkin

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $1 \le p < \infty$. $S \subset L^p(\Omega)$ σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν

(i) S φραγμένο ως την L^p νόρμα.

(ii) $\forall f \in S$, $\|f(x+y) - f(x)\|_{L^p} \to 0$, $|y| \to 0$
ομοιόμορφα για $f \in S$.

Δείξτε ότι $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, $q < \frac{np}{n-p}$, $p < n$
δικαιολογώντας λεπτομερώς τα εξής βήματα:
(μπορείτε να κάνετε χρήση των κριτηρίων συμπάγειας)

Βήμα I
Δείξτε ότι $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$

Βήμα II
Έστω $q \in \left(p, \frac{np}{n-p}\right)$. Από Theorem 2, p279 Evans

(α) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$

Λογαριθμική κυρτότητα της $\psi(s) = \ln \|f\|^s_{L^{s}(\Omega)}$ δίνει

(β) $\|f_n - f_0\|^q_{L^q(\Omega)} \le \|f_n - f_0\|^{\alpha p}_{L^p(\Omega)} \|f_n - f_0\|^{(1-\alpha)p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}$

Έστω $f_n \xrightarrow[W^{1,p}]{w} f_0$. Έπεται από (α), (β) $f_n \xrightarrow[L^q(\Omega)]{} f$ ισχυρά

//

Άσκηση 5

(i) Έστω ότι ισχύει η ανισότητα

(1) $\|u\|_{L^r} \le C_\alpha \|u\|^{1-\alpha}_{L^s} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p}$, C_α σταθερά, $\forall u \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ ανεξάρτητη του φορέα της
Δείξτε ότι αναγκαστικά

(2) $$\frac{1}{r} = \alpha\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-\alpha}{s}$$

(ii) Δείξτε ότι $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, C = C(\varepsilon, p)$ τ.ω.

(3) $$\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon \|u'\|_{L^p(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(0,1),\ p>1$$

Δείξτε επίσης ότι η (3) δεν ισχύει για $p=1$.

(iii) $1 \leq q < \infty$. $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, C = C(\varepsilon, q)$ τ.ω.

(4) $$\|u\|_{L^q(0,1)} \leq \varepsilon \|u'\|_{L^1(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}, \quad u \in W^{1,1}(0,1)$$

#

Άσκηση 6

$I = (0,1)$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R},\ x \notin I \end{cases}$$

(i) Αν $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

Αντίστροφα, $u \in L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$, και $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow u \in W_0^{1,p}(I)$

(ii) Αν $u \in L^p(I)$, $1 < p < \infty$, δείξτε ότι

$$u \in W_0^{1,p}(I) \Leftrightarrow \exists\, C \text{ τ.ω.}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \bar{u}\,\varphi'\,dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Άσκηση 7

(i) $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1<p<\infty$

Αν $u(0)=0 \implies \frac{u(x)}{x} \in L^p(0,1)$ και

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{p}{p-1} \|u'\|_{L^p(0,1)} .$$

(ii) Αντίστροφα, αν $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, και $\frac{u(x)}{x} \in L^p(0,1)$

$\implies$

$u(0)=0.$

\#

Άσκηση 8

Άσκηση 19 Evans, p 308.

Άσκηση 9

Άσκηση 16 Evans, p 308.

\#