Σχόλια

Η απόδειξη του Krein-Rutman έχει δύο κύρια σημεία

(I) Η συμπάγεια του T και η κυρτότητα του κώνου C έχει ως συνέπεια ότι $\omega(u) \neq \emptyset$, για $u \in \Sigma$

(II) Η γραμμικότητα του T έχει ως συνέπεια ότι

$\forall v \in \omega(u)$ είναι σταθερό σημείο του S και συνεπώς ιδιοδιάνυσμα του T.

Στην περίπτωση $\dim X < \infty$ το (I) είναι τετριμμένη απόρροια της συμπάγειας της σφαίρας. Λόγω αυτού δεν χρειαζόμαστε την κυρτότητα του C. Θα δείξαμε λοιπόν το αποτέλεσμα του Perron κάτω από ελαφρύτερες υποθέσεις από τις συνήθεις.
Στην περίπτωση $\dim X = \infty$ η κυρτότητα μας χρειάζεται. Θα ήταν ενδιαφέρον αν και σε αυτή την περίπτωση οι υποθέσεις θα μπορούσαν να χαλαρωθούν.

Απόδειξη Θεωρήματος Krein-Rutman

$T(u) = \|T(u)\| S(u)$

$S(u) = \dfrac{T(u)}{\|T(u)\|}$

$S(e_i) = e_{i+1}$

Μέρος Α.

Λήμμα 1 : Έστω $u \in \Sigma^+$. Τότε ισχύει

$$\omega(u) \neq \emptyset$$

Απ

Θέτουμε $e_1 = u$, $e_2 = Se_1, \ldots, e_{i+1} = Se_i, \ldots$

1. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\forall n = 1, 2, \ldots$ το σύνολο

$$\{e_1, \ldots, e_n\}$$

τουλάχιστον είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα:

Αν όχι τότε

$$e_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \Rightarrow S(e_n) = \frac{T(e_n)}{\|T(e_n)\|} = \frac{1}{\|T(e_n)\|} \sum_{i=1}^{n-1} c_i T(e_i)$$

$$= \frac{1}{\|T(e_n)\|} \sum_{i=1}^{n-1} c_i \|T(e_i)\| S(e_i) = \frac{1}{\|T(e_n)\|} \sum_{i=1}^{n-1} c_i \|T(e_i)\| e_{i+1} \in \operatorname{span}[e_1, \ldots, e_{n-1}]$$

Κατά συνέπεια η $e_{n+1} = S(e_n)$ εκφράζεται μέσω των $e_1, \ldots, e_{n-1}$ οπότε η συμπάγεια είναι προφανής διότι παραμένουμε στο $\mathbb{R}^{n-1}$.

2. $Te_i = \mu_i e_{i+1}$, $\mu_i = \|Te_i\|$

(a) Έστω ότι $\mu_i \longrightarrow 0$, $i \longrightarrow +\infty$.

Ορίζουμε:

$$\varepsilon_1 = e_1$$
$$\varepsilon_2 = \mu_1 e_2 - c e_1,$$
$$\varepsilon_{i+1} = T\varepsilon_i, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Παρατηρησεις

$e_2 \in \mathrm{Int}\, C \quad ((H_2))$

$\varepsilon_2 \in \mathrm{Int}\, C$ για $c>0$, μικρο. (Κυρτοτατα)

$\varepsilon_{i+1} = T\varepsilon_i \quad , i=2,3,\ldots \qquad \{\varepsilon_i\} \subset \mathrm{Int}\, C$

Αν $\alpha_i \geq 0$, και $\sum \alpha_i \varepsilon_i$ συγκλινει $\Rightarrow \sum \alpha_i \varepsilon_i \in C$ (C κλειστο, και (H_2)).

Ορισμος της $\{\alpha_i\}$

$$\alpha_i^+ = (2c)^{1-i} \quad , \quad \alpha_i^- = (2^i-1)(2c)^{1-i} \quad , \quad i=1,2,\ldots$$

$$\mu_0 = 1 \qquad \qquad S u = \frac{Tu}{\|Tu\|}$$

$$Tu = \|Tu\| Su$$

- $\begin{cases} \sum \alpha_i^+ \varepsilon_i , \ \sum \alpha_i^- \varepsilon_i \quad \text{συγκλινουν} \\ \sum_1^\infty \alpha_i^- \varepsilon_i = -\sum_1^\infty \alpha_i^+ \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$

Πραγματι

$$\mu_1 e_2 = \mu_1 S e_1 = \mu_1 \frac{Te_1}{\|Te_1\|}$$

$$\varepsilon_{i+1} = T^{i-1}(\mu_1 e_2 - c e_1)$$

$$= T^i e_1 - c T^{i-1} e_1$$

$$= \left(\prod_0^i \mu_j\right) e_{i+1} - c\left(\prod_0^{i-1} \mu_j\right) e_i$$

$$\sum_1^n \alpha_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left[(\alpha_i - c\alpha_{i+1}) \left(\prod_0^{i-1} \mu_j\right)\right] e_i + \alpha_n \left(\prod_0^{n-1} \mu_j\right) e_n$$

$\therefore$
$$\sum_1^n \alpha_i^+ e_i = \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \frac{\prod_0^{i-1} \mu_j}{(2c)^{i-1}} e_i + \frac{\prod_0^{n-1}\mu_j}{(2c)^{n-1}} e_n$$

$$\sum \alpha_i^- e_i = -\frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \frac{\prod_0^{i-1} \mu_j}{(2c)^{i-1}} e_i + \frac{(2^n-1)\prod_0^{n-1}\mu_j}{(2c)^{n-1}} e_n$$

Αν ισχυει (α), δηλ. $\mu_i \to 0$, τοτε οι Σ συγκλινουν:

$$\sum_K^n \frac{\prod^i \mu_j}{(2c)^i} = \sum_{i K}^n \left(\frac{\mu_1}{2c}\right)\left(\frac{\mu_2}{2c}\right)\cdots\left(\frac{\mu_i}{2c}\right) \leq \sum_K^n \left(\frac{\mu_i}{2c}\right)^K$$

(φιξαρουμε το K) $\qquad \left|\frac{\mu_i}{2c}\right| < 1 \quad \underline{i \geq K}$

συγκλινει, και επισης

$$\frac{2^n}{(2c)^{n-1}} \prod_K^{n-1} \mu_j \leq \frac{2^n}{(2c)^{n-1}} (\bar{\mu})^{n-K+1} \to 0 \quad \left(K \text{ φιξαρισμενο καταλληλα μεγαλο}\right)$$

$\therefore$
$$\sum_1^\infty \alpha_i^- e_i + \sum_1^\infty \alpha_i^+ e_i = 0$$

$0 \neq \sum \alpha_i^{\pm} e_i \in C$, συγκρουεται με την $x \in C, -x \in C \Rightarrow x=$ (H_1).

(b) <u>Εστω οτι $\mu_i \not\to 0$</u> (Συμπαγεια)

$\Rightarrow \exists$ υπακολουθια $\mu_{n_i} \geq \mu > 0$

T συμπαγης $\Rightarrow Te_{i_K}$ συγκλινει (υπακολουθια) $\therefore$

$$Te_{i_K} \to z \Rightarrow \|Te_{i_K}\| = \mu_{i_K} \to \|z\| \geq \mu$$

$T(u) = \|T(u)\| S(u)$
$S(u) = \dfrac{T(u)}{\|T(u)\|}$

Κατα συνεπεια

$$\lim S^{i_k} u = \lim e_{i_k+1} = \lim \frac{Te_{i_k}}{\|Te_{i_k}\|} = \frac{z}{\|z\|}$$

$S(e_i) = \dots$

$\Rightarrow \omega(u) \neq \emptyset$. Το Λημμα αποδειχθη.

Λημμα 2: Εστω $u \in \Sigma^+$. Τοτε $\omega(u) \subset \{$Σταθερων σημειων του $S\} = \{$ιδιοδιανυσματα του $T\}$.

Απ

(1) $S(v) = v \Leftrightarrow \dfrac{T(v)}{\|T(v)\|} = v \Leftrightarrow T(v) = \|T(v)\| v$.

Θα δειξαμε οτι αν $v \in \omega(u)$ τοτε $S(v) = v$.

(2) $v \in \omega(u) \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} S^{i_k}(u) = v \Leftrightarrow$

(3) Εστω $v \neq S(v) \Rightarrow u \neq S(u)$

$(H_1) \Rightarrow$ καθε ενα απο τα συνολα $\{v, S(v)\}$ και $\{u, S(u)\}$ συνισταται απο γραμμικα ανεξαρτητα στοιχεια. $(\|v\| = \|S(v)\| = 1)$.

(4) $\lim\limits_{k \to +\infty} T^{i_k}\left(\dfrac{S(u)}{\|T^{i_k}(u)\|}\right) = \|T(u)\|^{-1} T\left(\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{T^{i_k}(u)}{\|T^{i_k}(u)\|}\right)$.

Κανοντας χρηση του

$(*)$ $S^n(u) = \dfrac{T^n(u)}{\|T^n(u)\|}$

(9)

((*) για $n=1$ εξ' ορισμού.

Επαγωγή: ισχύει για n

$$S^{n+1}(u) = S\left(\frac{T^n(u)}{\|T^n(u)\|}\right) = \frac{T\left(\frac{T^n(u)}{\|T^n(u)\|}\right)}{\left\|T\left(\frac{T^n(u)}{\|T^n(u)\|}\right)\right\|} = \frac{T^{n+1}(u)}{\|T^{n+1}(u)\|} \quad)$$

(4), (2) $\Longrightarrow$

$$(5) \quad \lim_{k\to+\infty} T^{i_k}\left(\frac{S(u)}{\|T^{i_k}(u)\|}\right) = \|T(u)\|^{-1} T(v)$$

$$= \frac{\|T(v)\|}{\|T(u)\|} S(v)$$

Συνεπώς

$$S^{i_k}(u) \longrightarrow v \iff T^{i_k}\left(\frac{S(u)}{\|T^{i_k}(u)\|}\right) \to \frac{\|T(v)\|}{\|T(u)\|} S$$

$$(6) \quad \boxed{S^{i_k} u_\gamma \to v_\gamma} \iff T^{i_k}\left(\frac{S(u_\gamma)}{\|T^{i_k}(u_\gamma)\|}\right) \to \frac{\|T(v_\gamma)\|}{\|T(u_\gamma)\|} S(v_\gamma$$

όπου

$$u_\gamma = \frac{\cos\gamma\, u + \sin\gamma\, S(u)}{\|\cos\gamma\, u + \sin\gamma\, S(u)\|}, \quad v_\gamma = \frac{\cos\gamma\, v + \frac{\|T(v)\|}{\|T(u)\|}\sin\gamma\, S(v)}{\left\|\cos\gamma\, v + \frac{\|T(v)\|}{\|T(u)\|}\sin\gamma\, S(v)\right\|}$$

(Επαληθεύσατε την (6)).

Έστω

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid v_\gamma \in C\}.$$

Παρατηρήσεις

(α) $\Gamma \neq \emptyset$ διότι $v_0 \in C$

Εδώ κάναμε χρήση της γρ. ανεξ. v και $S(v)$

(β) Γ κλειστό διότι $\gamma \to v_\gamma$ συνεχής και C κλειστό.

(γ) Έστω $\sigma \in \Gamma \overset{(H_3)}{\Longrightarrow} S(v_\sigma) \in \operatorname{Int} C$

$$(6) \Rightarrow S(S^{i_k} u_\sigma) \longrightarrow S(v_\sigma)$$

$$\therefore \quad S^{i_k+1} u_\sigma \in \operatorname{Int} C$$

$$\therefore \quad S^{i_k+1} u_\gamma \in \operatorname{Int} C \quad \text{για } \gamma \in (\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$$

$$\therefore \quad v_\gamma \in C \quad \text{για } \gamma \in (\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$$

$\therefore$ Γ ανοικτό.

(α), (β), (γ) $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{\Gamma = \mathbb{R}}}$

Βγαίνει επομένως ότι

$$v_{\gamma+\pi} = -v_\gamma$$

που συγκρούεται με την (H_1)

Άρα $S(v)$, v δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\therefore \quad \boxed{S(v) = v}$$

$\square$

(11)

Code Απόδειξης

Λήμμα 1 : $u \in \Sigma^+ \Rightarrow \omega(u) \neq \emptyset$

Λήμμα 2 : $\omega(u) \subset$ σταθερά σημεία του S

$\Rightarrow \exists\ v \in \Sigma^+$ τ.ω. $S(v) = v \Leftrightarrow Tv = \|Tv\| v$, $\lambda := \|Tv\|$

$(H_3) \Rightarrow v \in \mathrm{Int}\, C$.

• $\dim \mathcal{H}_\lambda = 1$, $\mathcal{H}_\lambda =$ ιδιοχώρος της λ.

(Πράγματι, έστω $\exists\ w \in \mathcal{H}_\lambda$ γραμμικά ανεξάρτητο του v, $\|w\| = 1$.

Το επίπεδο $\{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}_\lambda$

$(H_1) \Rightarrow \exists\ \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ τ.ω. $\bar{\alpha} v + \bar{\beta} \bar{w} \in \partial C$.

$(H_3) \Rightarrow \bar{\alpha} v + \bar{\beta} \bar{w} \in \mathrm{Int}\, C$ $\left(T(\bar{\alpha} v + \bar{\beta} w) = \lambda(\bar{\alpha} v + \bar{\beta} w) \right)$ $\lambda > 0$, $\mathrm{Int}\, C$)

• Αν $\mu \in \mathbb{R}$, ιδιοτιμή του T, τότε $|\mu| \leq \lambda$

(Έστω $Tw = \mu w$, $|\mu| > \lambda$

$$S^n\left(\frac{\alpha v + \beta w}{\|\alpha v + \beta w\|} \right) \overset{(*)}{=} \frac{T^n\left(\frac{\alpha v + \beta w}{\|\alpha v + \beta w\|} \right)}{\left\| T^n\left(\frac{\alpha v + \beta w}{\|\alpha v + \beta w\|} \right) \right\|}$$

$|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

$$= \frac{\alpha v + \beta \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n w}{\left\| \alpha v + \beta \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n w \right\|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm w$$

ανάλογα με το αν $\beta > 0$ ή $\beta < 0$.

$(H_1) \Rightarrow$ δεν είναι δυνατόν $w \in C$ <u>και</u> $-w \in C$.

Έστω ότι $-w \in C$. Επιλέγοντας $\alpha > 0$, $\alpha >> 1$ κατασκευάζουμε $\alpha v + \beta w \in C \Rightarrow -w \in C$ $\cancel{\alpha}$.

Άσκηση: Να ολοκληρωθεί η Απόδειξη:

(a) αλγεβρική πολλαπλότητα του $\lambda = 1$

(b) μιγαδικές ιδιοτιμές.

#