## Διάλεξη 18 - Μέθοδος Ενέργειας

Θεωρούμε τις υποθέσεις για τον $L$ όπως ορίζεται στην (2)(ii), ειδικά την ελλειπτικότητα (4), και ότι (σ 104)

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^{ij} \in L^{\infty}(U), & & a^{ij} \in C^1(\bar{U}) \\ b^{i} \in L^{\infty}(U), & \Longleftarrow & b^{i} \in C^1(\bar{U}) \\ c \in L^{\infty}(U). & & c \in C^1(\bar{U}) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} (*) \\ σ.\,104 \\ (\bar{U} \text{ σ.χ.} \\ U) \end{array}$$

Θα ορίσουμε την διγραμμική μορφή,

$$B[u,v] = \int_U \left(a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + b^{i} u_{x_i} v + c u v\right) dx$$

και θα επαληθεύσουμε, υπό συνθήκες, το Θεώρημα Lax-Milgram, για $H = W_0^{1,2}$, για να επιλύσουμε το (3).

Σημειώνουμε ότι το Πρόβλημα

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in U \\ u = 0, & x \in \partial U \end{cases}$$

δεν έχει πάντα λύση $\forall f$, εν γένει.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το Π.Σ.Τ.

$$(4)\quad \begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 1 \;,\; u(\pi) = a \end{cases}$$

Πρώτα θα μετασχηματίσουμε το (3) σε μορφή (2)

Θέτουμε $v = u - [c_1 x + c_2]$

$0 = v(0) = u(0) - c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 1}$

$0 = v(\pi) = u(\pi) - [c_1 \pi + 1] \Rightarrow \boxed{c_1 = \dfrac{a-1}{\pi}}$

$\therefore$

$v'' = u''$,

$\therefore$

$$(5)\quad \begin{cases} v'' + v = c_1 x + c_2 = \dfrac{a-1}{\pi} + 1 \;,\; 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

$(4) \Leftrightarrow (5)$

Για να προσδιορίσουμε την λύση του (4) παίρνουμε αρχικά την γενική λύση της $u'' + u = 0$,

$u(x) = A\cos x + B\sin x$

$1 = u(0) = A \;,\; a = u(\pi) = -A$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα

(6) $\begin{cases} \text{(i) Αν } \alpha = -1 \text{ έχουμε άπειρες λύσεις} \\ \text{(ii) Αν } \alpha \neq -1 \ \nexists \text{ λύση.} \end{cases}$

Κατά συνέπεια η (5) έχει λύση μόνο αν $a=-1$ και μάλιστα όχι μοναδική. (βλ. Fredholm alternative of Γραμμική Άλγεβρα)

<u>Θεώρημα 1</u> (Προετοιμασία για Lax-Milgram)

Θεωρούμε την διγραμμική μορφή (2), σ 114.
$\exists$ σταθερές $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma\geq 0$ τ.ω.

(7) (i) $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$ (Επάνω φράγμα)

(ii) $\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$ (Κάτω —"—)

$H_0^1(U) := W_0^{1,2}(U)$

<u>Παρατήρηση</u>

Το $\gamma$ δεν μπορούμε να το επιλέξουμε μηδέν εν γένει, διότι σε τέτοια περίπτωση το (3) θα είχε λύση $\forall f$ που ορίζει ένα συναρτησιακό στο $(H_0^1)^*$. Έχουμε ότι $H_0^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$
$\Rightarrow (H_0^1)^* \supset (L^2(U))^* = L^2(U)$. Το προαναφερθέν
(Συμβολισμός: $(H_0^1)^* =: H^{-1}$)

παράδειγμα όμως, διότι προφανώς σταθερές, $\frac{a-1}{\pi}+1$, είναι $L^2([a,\pi])$, ισχύει ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν.

Απόδειξη Θεωρήματος 1

1. $$|B[u,v]| \leq \left| \int_U (a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + b^i u_{x_i} v + cuv)\,dx \right|$$

$$\leq \int_U | \text{———} \,,, \text{———} |\, dx$$

$$\leq \int_U \Big( \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} |\nabla u| |\nabla v| + \|b^i\|_{L^\infty(U)} |\nabla u| |v| + \|c\|_{L^\infty(U)} |u||v|$$

$$\leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \quad (\text{Schwartz})$$

$$+ C_2 \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad (\text{—}\,,,\text{—})$$

$$+ C_3 \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad (\text{—}\,,,\text{—})$$

Poincaré

$$\leq \alpha \|\nabla u\| \|\nabla v\| \quad \left( \begin{array}{l} \text{Poincaré} \\ \|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\| \\ \|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\| \end{array} \right)$$

$$= \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

η (i) Αποδείχθη.

2. Εγγυητικότητα (4), (5) $\Rightarrow$

$$\theta \|u\|^2_{H^1_0} \leq \int_U a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx$$

$$= B[u,u] - \int_U b^i u_{x_i} u \, dx - \int c u^2 dx$$

$$\leq B[u,u] + C_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + C_2 \|u\|^2_{L^2}$$

$= \|u\|^2_{H^1_0}$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} B[u,u] + C_1 \left( \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2} + \frac{c}{\varepsilon} \|u\|^2_{L^2} \right)$$

$\Longrightarrow$

$$(\theta - C_1 \varepsilon) \|u\|^2_{H^1_0} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2}.$$

Η (ii) Απέδειχθη.

$\square$

<u>Θεώρημα Υπαρξης Ι</u>

Θεωρούμε το (3)'

$$(3)' \begin{cases} Lu + \mu u = f, & f \in L^2(U), \ x \in U \\ u = 0, & x \in \partial U \end{cases}$$

Για $\mu \geq \gamma$ $\exists!$ λύση του $(3)'$, ασθενής, στο $H_0^1(U)$.

Απόδειξη

1. Η διγραμμική που αντιστοιχεί στον $L + \mu I$ είναι η

$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu(u,v) \quad , \quad u,v \in H_0^1(U)$$

Lax-Milgram ικανοποιείται, $(\cdot,\cdot)$ $L^2$ εσωτερικό.

2. Για $f \in L^2$, το συναρτησιακό $\langle f, v \rangle := (f,v)$ είναι φραγμένο στο $L^2$ και προφανώς στο $H_0^1$

$$\left( (H_0^1)^* \supset (L^2)^* = L^2 \right).$$

Παρατήρηση $\square$

Αν $c \geq 0$ και $b^i \equiv 0$ τότε $\gamma = 0$ και $\mu = 0$ είναι επιλογή, και συνεπώς το (3) έχει λύση μοναδική.

B. Εναλλακτική Αρχή Fredholm (Evans D.5)

$K : X \to Y$, $X, Y$ B-χώροι

(1) $\begin{cases} K \text{ συμπαγής: } \{u_i\} \text{ φραγμένη} \Rightarrow \{Ku_i\} \text{ σχετικά συμπαγές σύνολο.} \\ \text{Δηλ: } \exists \text{ υπακολουθία } \{u_{\nu(i)}\} \subset \{u_i\}, \text{ τ.ω. } Ku_{\nu(i)} \to y \in Y \end{cases}$

Εστω $X = Y = H$, $\{h_\nu\} \subset H$

k) $h_\nu \xrightarrow{w} h \Leftrightarrow (h_\nu, y) \to (h, y)$

<u>Παρατηρηση</u>

- Εστω $K: H \to H$ συμπαγης, και $K \in \mathcal{L}(H, H)$

$h_\nu \xrightarrow{w} h$ στον $H$. Τοτε $Kh_\nu \to Kh$

( $\forall$ η ακολουθια $\{Kh_n\}$ στοιχειων του συνολου

$\{Kh_1, Kh_2, \ldots, Kh_\nu, \ldots\}$

$\exists$ η υπακολουθια $\{Kh_{n'}\}$ τ.ω.

$Kh_{n'} \to \xi$, $\{h_{\nu'}\} \subset \{h_\nu\}$

Εστω $y$ αυθαιρετο στοιχειο στο $H$ συζυγης

$(Kh_{n'}, y) = (h_{n'}, K^* y) \to (h, K^* y) = (Kh, y)$

$\downarrow$

$(\xi, y)$

$\therefore (\xi, y) = (Kh, y) \quad \forall y \in H$

$\Longrightarrow \xi = Kh$, και $Kh_n \to Kh$. )

<u>Λήμμα</u>

Αν $K: H \to H$, $K \in \mathcal{L}(H,H)$, και συμπαγής, τότε $K^*$ είναι συμπαγής.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\{h_k\}$ φραγμένη στο $H$

Ασθενώς συμπαγές η της μοναδιαίας μπάλας $\{h \in H \mid \|h\| \leq$

$\Longrightarrow \exists$ ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $h_{k_j} \rightharpoonup h$

Θα δείξουμε ότι $K^* h_{k_j} \to K^* h$

(<u>Σημ</u>: Από Banach-Steinhaus, αν $\{u_k\}$ ασθενώς συγκλίνουσα $\Longrightarrow$ $\{u_k\}$ φραγμένη)

Πράγματι:

$\|K^* h_{k_j} - K^* h\|^2$

$= (K^* h_{k_j} - K^* h, K^*(h_{k_j} - h))$

$= (KK^* h_{k_j} - KK^* h, h_{k_j} - h)$

$K^* h_{k_j} \xrightarrow{w} K^* h$ (λόγω γραμμικότητας, γιατί;)

$\Rightarrow KK^* h_{k_j} \to KK^* h$ (Παρατήρηση)

$\Rightarrow |(KK^* h_{k_j} - KK^* h, h_{k_j} - h)| \leq \|KK^* h_{k_j} - KK^* h\| \, \|h_{k_j} - h\| \longrightarrow 0$

(Schwartz, $\{h_{k_j}\}$ φραγμένη) $\square$.