Διάλεξη 15 (Συμπάγεια $W^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q$, $1 \le q < p^*$, U φραγμένο — Rellich-Kondrachov

Ορ.

X, Y χώροι Banach

$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ συμπαγής εμφύτευση

$\|\cdot\|_X$ $\|\cdot\|_Y$

αν

(i) $X \hookrightarrow Y \iff \|u\|_Y \le C \|u\|_X$ $(X \subset Y)$

(ii) $\forall \{u_n\} \subset X$, $\|u_n\|_X < K$, $\exists \{u_{n_k}\}$ τ.ω.

$$u_{n_k} \xrightarrow{Y} u.$$

Θεώρημα

$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\partial U \in C^1$, $1 < p < n$.
Ισχύει

$$W^{1,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U), \quad 1 \le q < p^*.$$

Απόδειξη

1. Γνωρίζουμε ότι $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U) \Rightarrow$ (i) ισχύει.
Έστω $\{u_m\}$ φραγμένη στον $W^{1,p}(U) =: X$.

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\|u_m\|_{L^q(U)} \le C \|u_m\|_{W^{1,p}(U)}$

Θα δείξουμε ότι $\exists$ υπακολουθία $\{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$,

(2). $u_{m_j} \xrightarrow{L^q(U)} u$

(Από Θεώρημα Επέκτασης)

2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $O = \mathbb{R}^n$ και $\exists V$, ανοικτό, φραγμ

(3) $\quad spt\, u_m \subset V$,

και επίσης

(4) $\quad \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < C$

$$\int \eta_\varepsilon(x-z)\, u_m(z)\, dz = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) u_m(z)$$

3. Θεωρούμε τις "mollified" εκδόσεις των u_m:

(5) $\quad u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m \quad \left(0 < \varepsilon < \varepsilon,\ spt\, u_m^\varepsilon \subset V\right)$

4. Ισχυρισμός

(6) $\quad u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(V)} u_m \quad$ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ

ως προς m.

Απόδειξη της (6)

α) $\quad u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n} \displaystyle\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\left(u_m(z) - u_m(x)\right) dz$

$\left(\begin{array}{l} y = \frac{x-z}{\varepsilon} \\ dy = \frac{1}{\varepsilon^n} dz \end{array}\right) \quad = \displaystyle\int_{B(0,1)} \eta(y)\left(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x)\right) dy$

$$= \int_{B(0,1)} \eta(y)\left(\int_0^1 \frac{d}{dt}\, u_m(x-\varepsilon t y)\, dt\right) dy$$

$$= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y)\left(\int_0^1 \nabla u_m(x-\varepsilon t y)\cdot y\, dt\right) dy$$

Thus

$$(7)\quad \int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \left(\int_V |\nabla u_m(x - \varepsilon t y)|\, dx \right) dt \right) dy$$

$z = x - \varepsilon t y \Rightarrow \underline{\underline{dz = dx}}$, Xρuσn spt $u_m \subset V$

$$\int_V |\nabla u_m(z)|\, dz = \int_V |\nabla u_m(x - \varepsilon t y)|\, dx$$

$$\leq \varepsilon \int_V |\nabla u_m(z)|\, dz \leq \varepsilon \left(\int_V |\nabla u_m(z)|^p dz \right)^{1/p} |V|^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= \varepsilon C \, \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq \varepsilon \bar{C}.$$

Hence $(7) \Rightarrow$

$$(8)\quad \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \bar{C} \varepsilon, \quad \forall m.$$

Επισης απο

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq 2C \|u_m\|_{W^{1,p}}$$

Σ,

$$(9) \qquad \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)} \leq \tilde{C}$$

C. Τέλος από ανισότητα παρεμβολής (Hölder)

$$(10) \qquad \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_\varepsilon^m - u_m\|_{L^1(V)}^{\theta} \, \|u_\varepsilon^m - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

$$\left(\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*} \right)$$

(8), (10) $\Rightarrow$

$$(11) \qquad \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\varepsilon^\theta$$

$\therefore$

$$u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(V)} u_m \quad \text{ομοιόμορφα ως προς } m.$$

Η (6) αποδείχθηκε.

$\square$

5. <u>Ισχυρισμός</u>

Για <u>$\varepsilon > 0$ φιξαρισμένο</u>, η $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^{\infty}$, $u_m^\varepsilon : V \to \mathbb{R}$

(12) $\begin{cases} \text{είναι φραγμένη} \quad |u_m^\varepsilon(x)| < C, \quad x \in V \\ \text{και ισοσυνεχής: } \forall \text{ δοθέντος } \bar{\delta} \ \exists\, \Delta = \Delta(\bar{\delta}) \text{ τ.ω.} \\ \qquad |u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \leq \bar{\delta} \quad \text{αν} \quad |x-y| \leq \Delta(\bar{\delta}) \end{cases}$

(Δεν υποστηρίζουμε ότι $\Delta(\bar{\delta})$ δεν εξαρτάται από το ε !)

Απόδειξη της (12)

A. Ομοιόμορφα Φραγμένα

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|dy$$

$$\leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty.$$

B. Ισοσυνέχεια

$$|\nabla u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|dy$$

$$\leq \|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} <$$

$\Rightarrow$ (12) $\square$

Έστω μια ακολουθία $\varepsilon_\lambda \longmapsto 0$, που την φιξάρουμε. $\rightarrow$

Από Ascoli-Arzela $\{u_m^{\varepsilon_1}\}_{m=1}^\infty$ είναι (σχετικά) συμπαγής στην max νόρμα, και κατά συνέπεια στην $L^q(V)$ εφ' όσον V συμπαγές, $C^0(V) \hookrightarrow L^q(V)$.

Παρομοίως και η $\{u_m^{\varepsilon_2}\}_{m=1}^\infty$ κ.λ.π.

Κατα συνεπεια $\exists$ υπακολουθια

$$u^{\varepsilon_1}_{m_1(\varepsilon_1)}, u^{\varepsilon_1}_{m_2(\varepsilon_1)}, \dots, u^{\varepsilon_1}_{m_j(\varepsilon_1)} \dots \xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_1}$$

Επιλεγουμε υπακολουθια της $m_1(\varepsilon_1), m_2(\varepsilon_1), \dots$

$$\{m_k(\varepsilon_2)\} \subset \{m_\nu(\varepsilon_1)\} \quad \text{τ.ω.}$$

$$u^{\varepsilon_2}_{m_1(\varepsilon_2)}, u^{\varepsilon_2}_{m_2(\varepsilon_2)}, \dots \xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_2}$$

Ισχυει οτι $m_1(\varepsilon_1) \le m_2(\varepsilon_2)$.

Γενικοτερα

$$(13) \quad u^{\varepsilon_n}_{m_1(\varepsilon_n)}, u^{\varepsilon_n}_{m_2(\varepsilon_n)}, \dots \xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_n}$$

$$\vdots$$

$$m_k(\varepsilon_k)$$

6. Coda

Δοθεντος $\delta > 0$ $\exists$ $N(\delta)$ ακεραιος, τ.ω.

$$(14) \quad \| u^{\varepsilon_n}_{m_n(\varepsilon_n)} - u^{\varepsilon_k}_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q(V)} < \delta, \quad k \ge n > N.$$

Αυτο απο την n γραμμη, (13).

Θεωρουμε τωρα την

$$(15) \quad \{u_{m_\nu(\varepsilon_\nu)}\} \subset L^q(V), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Θα δείξουμε ότι είναι Cauchy :

$$\| u_{m_n(\varepsilon_n)} - u_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q(V)}$$

$$\leq \| u_{m_n(\varepsilon_n)} - u^{\varepsilon_n}_{m_n(\varepsilon_n)} \|_{L^q} + \| u^{\varepsilon_n}_{m_n(\varepsilon_n)} - u^{\varepsilon_n}_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q}$$

$$+ \| u^{\varepsilon_n}_{m_k(\varepsilon_k)} - u_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q}$$

$$\overset{(11)}{\leq} C\varepsilon_n^{\theta} + \| u^{\varepsilon_n}_{m_n(\varepsilon_n)} - u^{\varepsilon_n}_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q} + C\varepsilon_k^{\theta}$$

$$\overset{(14)}{\leq} C\varepsilon_n^{\theta} + \delta + C\varepsilon_k^{\theta} \quad , \quad k \geq n \geq N$$

$$\leq 2\delta \quad , \quad k \geq n \geq N$$

$(\because \varepsilon_\nu \longrightarrow 0)$.

Η Απόδειξη του Rellich-Kondrachov Θεωρήματος είναι πλήρης.

$\square$

Σχόλιο

$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Rightarrow L^p(U) \supseteq L^{p^*}(U)$

U φραγμένο

Έχουμε ότι $W^{1,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U)$

για $q \in [1, p^*)$, $1 \leq p < n$

Προκύπτει ότι

(16) $W^{1,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$

$1 \leq p < n$.

Ascoli–Arzelà

Για $p > n$, U φραγμένο

(17) $W^{1,p}(U) \overset{\text{Morrey}}{\hookrightarrow} C^{\alpha}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$

Συμπέρασμα:

(18) $W^{1,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(U)$

$\forall p \geq 1$.

<u>Εφαρμογη</u>: Ανισοτητα Poincaré με Μεσο Ορο

<u>Θεωρημα</u>:

$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμενο, $\underbrace{\partial U \in C^1}_{\text{συνεκτικο}}$, $1 \leq p \leq \infty$

Το $\exists\, C = C(n, p, U)$ τ.ω.

(19) $$\left\| u - \fint_U u \right\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

<u>Αποδειξη</u> (Με εις Ατοπον)

Εστω οτι δεν ισχυει η (19). Τοτε δοθεντος $k = 1, 2, \ldots$ $\exists\, u_k$ τ.ω.

(20) $$\left\| u_k - \fint_U u_k \right\|_{L^p(U)} > k \|\nabla u_k\|_{L^p(U)}$$

Η ανισοτητα ειναι ομογενης. Κανονικοποιουμε:

(21) $$v_k := \frac{u_k - \fint u_k}{\left\| u_k - \fint_U u_k \right\|_{L^p(U)}}$$

οποτε

(22) $$\fint_U v_k = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(U)} = 1, \quad \|\nabla v_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

8-

$< M$

$(-\theta)$

$\{ v_{x_j} \}$

$\|v\|_{L^p(U)} = 1 \, . \quad \|v\| =$

$\int_U -v_{x_j} \phi_{x_i} \, dx$

$\to \int_U \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v_{x_j} \right) \phi \, dx$

$v \equiv$ сталa $\stackrel{(25)}{\Longrightarrow} v = 0$

$_{(U)} = 1 .$

$\square$