

Ασκήσεις Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών

1ο Φυλλάδιο

- (1) Αν K αλγεβρικό σώμα αριθμών και $\alpha \in K$, να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο m ισχύει:

$$D_K(\alpha) = D_K(\alpha + m)$$

- (2) Αν $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $p \in \mathbb{P}$ να υπολογίσετε την διακρίνουσα $D_K(1 - \zeta_p)$.

- (3) Έστω $K = \mathbb{Q}(\theta)$, θ ακέραιος αλγεβρικός, ρίζα του αναγωγού υπέρ το $\mathbb{Q}$ πολωνύμου

$$f(x) = x^n + ax = b,$$

$a, b \in \mathbb{Q}$, $n \geq 2$. Να υπολογιστεί η διακρίνουσα $D_K(\theta)$.

- (4) Έστω $f(x) = x^5 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$ και $f(x)$ ανάγωγο υπέρ το $\mathbb{Q}$. Αν α είναι μία ρίζα του $f(x)$ να αποδείξετε ότι

$$D_K(\alpha) = 4^4 a^5 + 5^5 b^4.$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha^5 = \alpha + 1$. Να αποδείξετε ότι $R_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, όπου $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

- (5) Να αποδείξετε ότι αν το α είναι ρίζα μονικού πολωνύμου με συντελεστές ακέραιους αλγεβρικούς αριθμούς, τότε το α είναι ακέραιος αλγεβρικός αριθμός.

- (6) Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$, με m και n ακέραιους ελευθέρους τετραγώνου $\neq \pm 1$, $m \neq n$. Να αποδειχθεί ότι ο $\alpha \in K$ είναι ακέραιος αλγεβρικός τότε και μόνο τότε όταν η $N_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(\alpha)$ και το ίχνος $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(\alpha)$ είναι ακέραιοι αλγεβρικοί.

- (7) Αν $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$, όπου m, n ακέραιοι ελεύθεροι τετραγώνου και πρώτοι μεταξύ τους. Να υπολογίσετε μία βάση ακεραιότητας του K όταν

(α') $m, n \equiv 1 \pmod{4}$ καθώς και όταν

(β') $m \equiv 1 \pmod{4}$ και $n \not\equiv 1 \pmod{4}$.

- (8) Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών R_K ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών αυτού και P πρώτο ιδεώδες του R_K . Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in R_K$ ισχύει:

$$x^{N_K(P)} \equiv x \pmod{P}.$$

Επίσης να αποδειχθεί ότι η $\text{norm } N_K(P)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός n για τον οποίο ισχύει

$$x^n \equiv x \pmod{P}$$

για κάθε $x \in R_K$.

- (9) Για κάθε ιδεώδες A του R_K συμβολίζουμε το πλήθος των αντιστρεψίμων στοιχείων του δακτυλίου R/A με $\phi(A)$. Να αποδειχθεί ότι αν A, B δύο ιδεώδη του του R_K πρώτα μεταξύ τους

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B).$$

Στην συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\phi(A) = N_{K/\mathbb{Q}}(A) \prod_{\substack{P \in \text{Spec } A \\ P|A}} (1 - N_{K/\mathbb{Q}}(P)^{-1}).$$

Τέλος να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in R_K$ για το οποίο το ιδεώδες xR_K είναι πρώτο προς το A ισχύει

$$x^{\phi(A)} \equiv x \pmod{A}.$$

- (10) Έστω L αλγεβρικό σώμα αριθμών το οποίο περιέχει την Galois θήκη της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$. Έστω $A \triangleleft R_K$ ιδεώδες. Αν το σ διατρέχει όλες τις εμφυτεύσεις του K στο $\mathbb{C}$ να αποδειχθεί ότι

$$\prod_{\sigma} \sigma(A)R_L = N_{K/\mathbb{Q}}(A)R_L.$$

- (11) Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών και $A \triangleleft R_K$ ιδεώδες. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επέκταση L/K στην οποία το ιδεώδες AR_L να είναι κύριο ιδεώδες.

- (12) Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$y^2 = x^3 - 2.$$

- (13) Έστω d ακέραιος ελεύθερος τετραγώνου $d < 0$ και $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Έστω h_K ο αριθμός κλάσεων του σώματος $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Υποθέτουμε ότι $3 \nmid h_K$. Να αποδειχθεί ότι οι ακέραιες λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$y^2 = x^3 + d$$

είναι ακριβώς τα ζευγάρια $(x, y) = (A^2 - d, A(A^2 + 3d))$, όπου το A διατρέχει όλους τους ακέραιους για τους οποίους ισχύει $3A^2 \pm 1 = -d$.

- (14) Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$y^2 = x^3 + 13.$$

- (15) Να υπολογιστεί ο αριθμός κλάσεων του σώματος $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-13})$ και στην συνέχεια να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$2y^3 = x^2 + 73.$$

- (16) Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των ακέραιων ιδεωδών που διαιρούν κάποιο ακέραιο ιδεώδες ενός αλγεβρικού σώματος αριθμών είναι πεπερασμένο.
 (17) Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος ακέραιων ιδεωδών ενός αλγεβρικού σώματος αριθμών.
 (18) Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των ακέραιων ιδεωδών ενός αλγεβρικού σώματος αριθμών με δοσμένη norm είναι πεπερασμένο.
 (19) Αν υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ ενός ακέραιου ιδεώδους αλγεβρικού σώματος αριθμών K , ώστε

$$|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| = N_K(A),$$

τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει $A = \langle \alpha \rangle$.

- (20) Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πεπερασμένη επέκταση αλγεβρικών σωμάτων αριθμών L/K με την ιδιότητα ότι όλα τα ιδεώδη AR_L να είναι κύρια ιδεώδη για κάθε ακέραιο ιδεώδες A του K .
 (21) Να υπολογίσετε τον αριθμό κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
 (22) Να υπολογίσετε τον αριθμό κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.
 (23) Να υπολογίσετε τον αριθμό κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$.
 (24) Να υπολογίσετε τον αριθμό κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\theta)$, όπου θ ρίζα του πολυωνύμου $x^5 - x^3 + 1$.
 (25) Να υπολογιστεί η αλγεβρική δομή της ομάδας κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.
 (26) Να υπολογιστεί η αλγεβρική δομή της ομάδας κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-26})$.
 (27) Να υπολογιστεί η αλγεβρική δομή της ομάδας κλάσεων ιδεωδών του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-65})$.
 (28) Έστω k ακέραιος ώστε $k < -1$, k ελεύθερος τετραγώνου, $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$ και $3 \nmid h_{\mathbb{Q}(\sqrt{k})}$. Αν υπάρχει ένας ακέραιος a , $k = 1 - 3a^2$ τότε οι μοναδικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $y^2 = x^3 + k$ είναι οι $x = 4a^2 - 1$, $y = \pm(3a - 8a^2)$.
 (29) Θεωρούμε το σώμα $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Να υπολογιστεί η διακρίνουσα και να βρεθεί μια βάση ακεραιότητας αυτού. Έστω p πρώτος, $p \neq 2, 3$.
 (α) Να υπολογιστεί η ανάλυση του p στο K για $p = 5, 7, 11, 13$ και 31 .
 (β) Γενικά αν $p \equiv 2 \pmod{3}$ να αποδειχθεί ότι $pR_K = P_1P_2$ με $f(P_1/p) = 1$ και $f(P_2/p) = 2$.
 (γ) Αν $p \equiv 1 \pmod{3}$, να αποδειχθεί ότι το p ή αναλύεται πλήρως $pR_K = P_1P_2P_3$, $N_{K/\mathbb{Q}}(P_i) = p$, $i = 1, 2, 3$ ή αδρανεί στο K , $pR_K = P$, $N_{K/\mathbb{Q}}(P) = p^3$.
 (δ) Στην περίπτωση που $p \equiv 1 \pmod{3}$, τότε ισχύει η πλήρης ανάλυση και τότε η αδράνεια;
 (ε) Τέλος να υπολογισθεί η ανάλυση των $p = 2$ και $p = 3$ στο σώμα K .
 (30) Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{10})$.
 (α) Να υπολογιστεί η διακρίνουσα και μια βάση ακεραιότητας του K .
 (β) Να υπολογιστεί η ανάλυση του $p = 7$

- (γ') Επίσης η ανάλυση του $p = 11$
 (δ') Το ίδιο για την ανάλυση του $p = 37$
 (ε') Το ίδιο για την ανάλυση του $p = 2, 3, 5$.
- (31) Να αποδειχθεί ότι κανένας πρώτος αριθμός p δεν αδρανεύει, δηλαδή το pR_K παραμένει πρώτο ιδεώδες, στο σώμα $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
- (32) Να υπολογιστεί ο αριθμός κλάσεων του αλγεβρικού σώματος αριθμών $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ καθώς και την δομή της ομάδας κλάσεων ιδεωδών αυτού.
- (33) Έστω α περιττός ακέραιος, $\alpha > 1$. Αν $d = 3^\alpha - x^2$ ελεύθερο τετραγώνου και x περιττός, $x^2 < 3^\alpha/2$. Να αποδειχθεί ότι το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ έχει στην ομάδα κλάσεων του ένα στοιχείο τάξης α .
- (34) Έστω $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$, όπου $\zeta_8 = e^{2\pi i/8}$. Να αποδειχθεί ότι κανένας πρώτος αριθμός p δεν αδρανεύει στο K .
- (35) Έστω p περιττός πρώτος. Αν α είναι ένας ακέραιος ο οποίος δεν είναι p -στη δύναμη, τότε ο p διακλαδίζεται στο σώμα $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{\alpha})$.