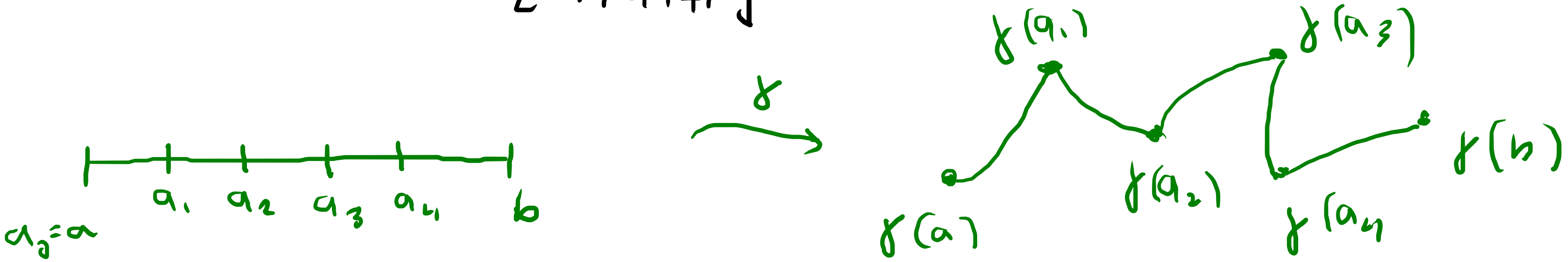
Καμπύλες σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M : Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα

- **Παραμετρική καμπύλη**: $\gamma : I \to M$ συνεχής
- **C^∞ παραμετρική καμπύλη**: $\gamma : I \to M$ C^∞

  (*) Αν σε ένα άκρο του το I είναι κλειστό, $\gamma : I \to M$ C^∞ σημαίνει ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα $\hat{I} \subseteq \mathbb{R}$ και $\tilde{\gamma} : \hat{I} \to M$ C^∞ ώστε $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ $\forall\, t \in I$.

  Τότε, αν για παράδειγμα $a = \inf I \in I$, ορίζουμε $\gamma'(a) = \tilde{\gamma}'(a)$ $\rightsquigarrow$ δεν εξαρτάται από την επέκταση $\tilde{\gamma}$.
- **Κανονική καμπύλη**: $\gamma : I \to M$ C^∞ καμπύλη με $|\gamma'(t)| = 1$ $\forall\, t \in I$.
- **Κατά τμήματα C^∞ καμπύλη**: Παραμετρική καμπύλη $\gamma : [a,b] \to M$ ώστε να υπάρχει διαμέριση $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ του $[a,b]$ και $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ C^∞ κανονική καμπύλη, $\forall\, i = 0, \dots, n-1$



Αναπαραμέτριση μιας C^∞ καμπύλης

1) Αν $\gamma : I \to M$ C^∞ καμπύλη, η $\hat{\gamma} : \hat{I} \to M$ λέγεται αναπαραμέτριση της γ αν υπάρχει $\varphi : \hat{I} \to I$ C^∞, 1-1, επί, φ^{-1} C^∞ ώστε $\forall\ t \in \hat{I}$ $\hat{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$

2) Αν $\gamma : [a,b] \to M$ είναι μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη λέμε ότι $\hat{\gamma} : [c,d] \to M$ είναι αναπαραμέτριση της γ αν υπάρχει $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ ομοιομορφισμός ώστε $\hat{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$ $\forall\ t \in [c,d]$ και υπάρχει μια διαμέριση $c = c_0 < c_1 < \dots < c_n = d$ ώστε $\varphi|_{[c_i, c_{i+1}]}$ $i = 0, \dots, n-1$ να είναι αμφιδιαφόριση στην εικόνα της

Μήκος κατά τμήματα C^∞ καμπύλης

σε μια (M,g) Riemann

Έστω $\gamma : [a,b] \to M$ μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη, με διαμέριση $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$.

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\gamma(t)|\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

↳ συνεχής και φραγμένη συνάρτηση που ενδεχομένως δεν ορίζεται σε σύνολο μέτρου 0.

Ιδιότητες του μήκους. Έστω (M,g) πολλ/τα Riemann και $\gamma : [a,b] \to M$ μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη.

1) Αν $a < s < b$ τότε $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,s]}) + L(\gamma|_{[s,b]})$

2) Αν $\hat{\gamma} : [c,d] \to M$ μια αναπαραμέτριση της γ, τότε

$$L(\hat{\gamma}) = L(\gamma)$$

3) Αν $(\tilde{M}, \tilde{g})$ πολλ/τα Riemann και $F : (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ είναι τοπική ισομετρία, τότε $L(\gamma) = L(F \circ \gamma)$

($F \circ \gamma$ επίσης κατά τμήματα C^∞)

↳ Η απόδειξη άσκηση από τους ορισμούς, όμοια με μάθημα σε καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$.

Συνάρτηση μήκος τόξου $\gamma : I \to M$, $t_0 \in I$ κατά τμήματα C^∞ $\Bigg\}$ $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(u)|\, du$: με την ίδια έννοια που ορίσαμε το $L(\gamma)$.

• κάθε κατά τμήματα C^∞ καμπύλη δέχεται αναπαραμέτρηση με μοναδιαία ταχύτητα (όπου η γ είναι C^∞)

<u>Πρόταση</u>: Αν η M είναι συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα τότε για κάθε $p,q \in M$ υπάρχει κατά τμήματα C^∞ $\gamma:[a,b]\to M$ ώστε $\gamma(a)=p$ και $\gamma(b)=q$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $p \in M$ και $S = \left\{ x\in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{υπάρχει } \gamma:[a,b]\to M \\ \text{κατά τμήματα } C^\infty \text{ ώστε} \\ \gamma(a)=p,\ \gamma(b)=x \end{array} \right\}$

• $S \subseteq M$ ανοιχτό

Έστω $x\in M$ και $\gamma:[a,b]\to M$ κατά τμήματα C^∞, $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=x$

Έστω (U,φ) χάρτης γύρω από το x, και $\varepsilon>0$ μικρό ώστε $B_\varepsilon(\varphi(x))\subseteq\varphi(U)$

Τότε $\forall\, y\in\varphi^{-1}(B_\varepsilon(x))$ ορίζουμε $\hat\gamma:[a,b+1]\to M$ κατά τμημ. C^∞.

$$\hat\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t\in[a,b] \\ \varphi^{-1}\big((t-b)\varphi(y) + (1-t+b)\varphi(x)\big) & t\in[b,b+1] \end{cases} \to \begin{array}{l} \hat\gamma(a)=p \\ \hat\gamma(b+1)=y \end{array}$$

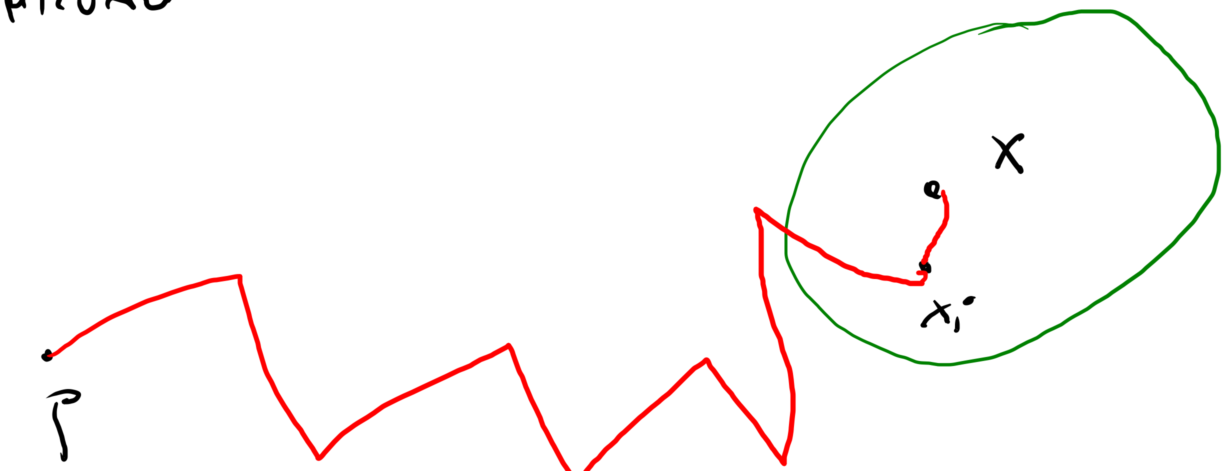
• $M\setminus S \subseteq M$ ανοιχτό: Έστω ότι δεν είναι ανοιχτό

$\Rightarrow$ υπάρχει $x \in M\setminus S$ και $x_i \to x$ με $x_i \in S$. Έστω (U,φ)

C^∞ χάρτης γύρω από το x. Τότε για μεγάλο i $x_i \in U$

και όπως πριν ενώνουμε το x_i με το x με μια

C^∞ καμπύλη



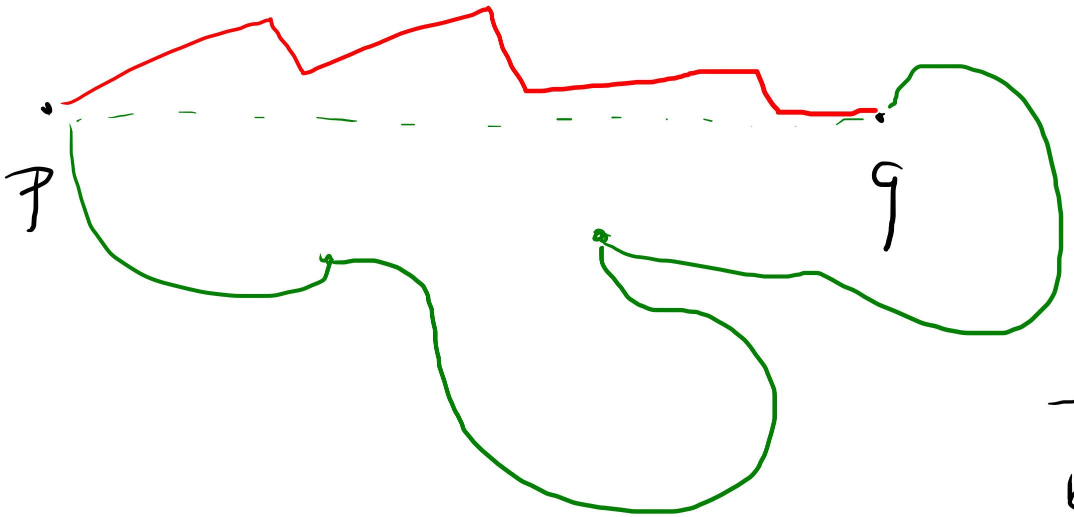
$\Rightarrow M = S \cup (M\setminus S)$ η ένωση ξένων ανοιχτών $\Rightarrow M$ όχι συνεκτική

άτοπο.

Ορισμός (M,g) πολλ/τα Riemann, $p,q \in M$, M συνεκτική

$$d_g(p,q) = \inf\{ L(\gamma) \mid \gamma \text{ κατά τμήματα } C^\infty \text{ καμπύλη από το } p \text{ στο } q \}$$

d_g ονομάζεται απόσταση Riemann της g.



$0 \le d_g(p,q) < \infty$, $\forall\, p,q \in M$

από την προηγούμενη Πρόταση

→ Αν η M δεν είναι συνεκτική και p,q ανήκουν σε διαφ. συνιστώσες, τότε $d_g(p,q) = +\infty$, αφού δεν υπάρχει μονοπάτι που να τα συνδέει

Θα δείξουμε ότι 1) (M, d_g) είναι μετρικός χώρος
2) έχει την ίδια τοπολογία με την τοπολογία της M

• $0 \le d_g(p,q) < \infty$ ✓

• Τριγωνική ανισότητα (Εύκολο) : Έστω $p, q, z \in M$

Για κάθε γ_1, γ_2 κατά τμήματα C^∞, γ_1 από το p στο z και γ_2 από το z στο q

$$d_g(p,q) \le L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

οπότε παίρνοντας infimum

$$d_g(p,q) \le d_g(p,z) + d_g(q,z)$$

Λήμμα (Σύγκριση με την Ευκλείδεια μετρική)

Έστω $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, g μετρική Riemann στο W. Για κάθε συμπαγές $K \subseteq W$ υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε για κάθε $x \in K$ και $v \in T_x\mathbb{R}^n$

$$c|v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \le |v|_g \le C|v|_{g_{\mathbb{R}^n}}$$

Απόδειξη: $F : TW \to \mathbb{R}$, $F(v) = |v| = \left(g_{\pi(x)}(v,v)\right)^{1/2}$, $\pi : TW \to W$ προβολή.

F συνεχής.

Αν $K \subseteq W$ συμπαγές τότε $L = \{v \in TW \mid \pi(v) \in K, \ |v|_{g_{\mathbb{R}^n}} = 1\}$ είναι συμπαγές, αφού ταυτίζοντας TW με $W \times \mathbb{R}^n$ ώστε η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ να αντιστοιχεί σε ο.κ. πλαίσιο της μετρικής $g_{\mathbb{R}^n}$, βλέπουμε ότι L είναι ομοιομορφικό με $K \times S^{n-1}$.

Έστω $c = \min_L F$, $C = \max_L F$. Τότε $\forall v \in T_x\mathbb{R}^n$, $x \in K$

$$c|v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \le |v|_g = |v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \cdot \left|\frac{v}{|v|_{g_{\mathbb{R}^n}}}\right|_g = |v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \cdot F\left(\frac{v}{|v|_{g_{\mathbb{R}^n}}}\right) \le C|v|_{g_{\mathbb{R}^n}}$$

Λήμμα: Έστω (M,g) πολ/τα Riemann, d_g η απόσταση Riemann της g

Έστω $U \subseteq M$ ανοικτό και $p \in U$. Υπάρχει $V \subseteq U$ ανοικτό $p \in V$ και (V,φ) χάρτης ($\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $\bar{g} = \varphi^* g_{\mathbb{R}^n}$ μετρική Riemann στο V) ώστε για κάποιες σταθερές $c, D > 0$

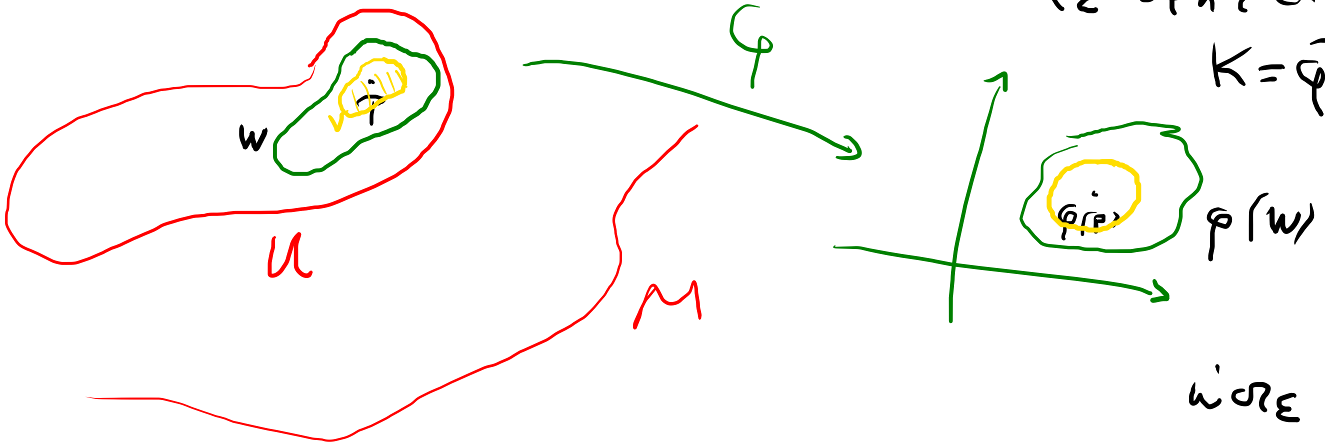
1) $\forall \; q \in V \qquad d_g(p,q) \leq C \, d_{\bar{g}}(p,q)$

2) Αν $q \in M \setminus V$ τότε $d_g(p,q) \geq D$

Απόδειξη: Έστω (W,φ) C^∞ χάρτης με $W \subseteq U$ και $p \in W$, $V = \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(p)))$ (ε αρκετά μικρό ώστε $B_\varepsilon(\varphi(p)) \subseteq \varphi(W)$)

$K = \varphi^{-1}\left(\overline{B_\varepsilon(\varphi(p))}\right)$ συμπαγές $\subseteq W$

$\tilde{g} = (\varphi^{-1})^* g$ μετρική στο $\varphi(W)$



Από το προηγ. Λήμμα $\exists \; c, C > 0$ ώστε $\forall \; x \in K$, $v \in T_x \mathbb{R}^n$

$$c \, |v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \leq |v|_{\tilde{g}} \leq C \, |v|_{g_{\mathbb{R}^n}}$$

Για κάθε κατά τμήματα C^∞ $\gamma : I \to B_\varepsilon(\varphi(p))$ ισχύει

$$c L_{g_{\mathbb{R}^n}}(\gamma) \le L_{\tilde{g}}(\gamma) \le C L_{g_{\mathbb{R}^n}}(\gamma)$$

(a) Έστω $q \in V$. Το ευθ. τμήμα γ που συνδέει $\varphi(p)$ και $\varphi(q)$ περιέχεται στο $B_\varepsilon(\varphi(p))$ και έχει μήκος $L_{g_{\mathbb{R}^n}}(\gamma) = d_{g_{\mathbb{R}^n}}(\varphi(p), \varphi(q)) < \varepsilon$

$\Rightarrow$

$$d_g(p,q) \le \underbrace{L_g(\varphi^{-1}\circ\gamma) = L_{\tilde{g}}(\gamma)} \le c L_{g_{\mathbb{R}^n}}(\gamma) = C d_{g_{\mathbb{R}^n}}(\varphi(p), \varphi(q)) = C d_{\bar{g}}(p,q) \quad ✓$$

Ευκλείδεια απόσταση = μήκος ευθ. τμήματος

$\bar{g} = \varphi^* g_{\mathbb{R}^n}$

$$L_g(\varphi^{-1}\circ\gamma) = \int_a^b |(\varphi^{-1}\circ\gamma)'(t)|_g \, dt$$

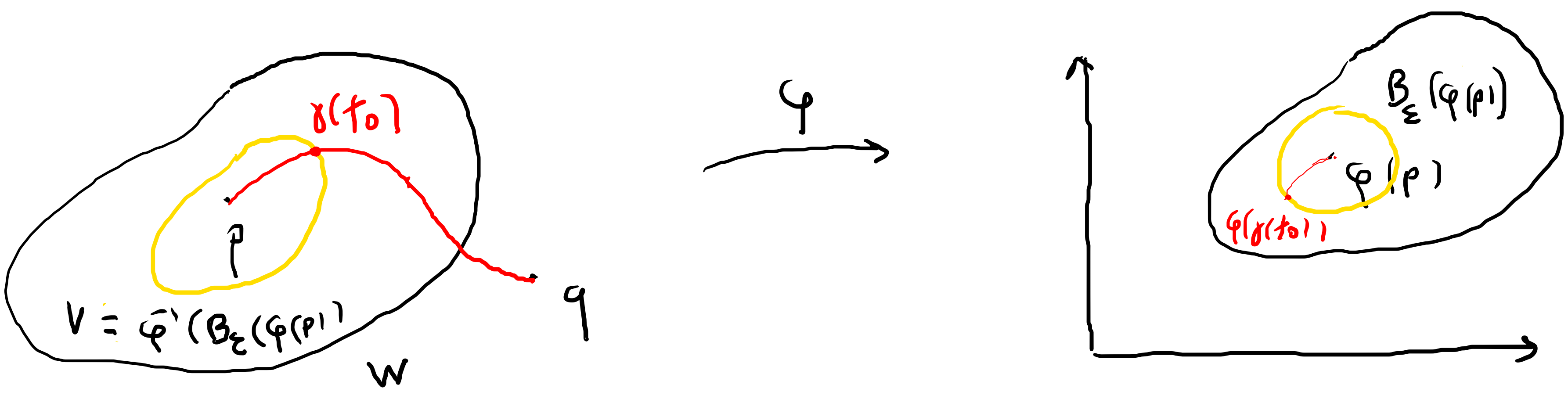
$$= \int_a^b |(\varphi^{-1})_* \gamma'(t)|_g \, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|_{\tilde{g}} \, dt = L_{\tilde{g}}(\gamma)$$

$$|(\varphi^{-1})_* \gamma'(t)|_g = \left(g_{\varphi^{-1}\circ\gamma(t)}((\varphi^{-1})_* \gamma'(t), (\varphi^{-1})_* \gamma'(t))\right)^{1/2}$$

$$= \left[\left[(\varphi^{-1})^* g\right]_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))\right]^{1/2} = \left(\tilde{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))\right)^{1/2} = |\gamma'(t)|_{\tilde{g}}$$

(b) Έστω $q \in M \setminus V$ και $\gamma : [a,b] \to M$ κατά τμήματα C^∞ από το p στο q. Έστω $t_0 = \inf\{t \in [a,b]$ με $\gamma(t) \notin V\}$

Τότε $\gamma|_{[a,t_0]} \subseteq K$ και λόγω συνέχειας $d_{\bar g}(p, \gamma(t_0)) = \varepsilon$



$$d_{\bar g}(p, \gamma(t_0)) = d_{g_{\mathbb{R}^n}}(\varphi(p), \varphi(\gamma(t_0))) = \varepsilon$$

Επομένως $L_g(\gamma) \geq L_g(\gamma|_{[a,t_0]}) = L_{\bar g}(\varphi^{-1} \circ \gamma|_{[a,t_0]}) \geq c\, L_{g_{\mathbb{R}^n}}(\varphi^{-1} \circ \gamma|_{[a,t_0]})$

$$= c \cdot d_{g_{\mathbb{R}^n}}(\varphi(p), \varphi(\gamma(t_0))) = c \cdot \varepsilon =: D$$

$\Rightarrow d_g(p,q) \geq D.$ ✓

$\Big\{$ Έστω (M, g) πολλ/τα Riemann, $p, q \in M$. Τότε $d_g(p,q) \geq 0$
και $d_g(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

Αρκεί να δείξουμε ότι $p \neq q \Rightarrow d_g(p,q) > 0$

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο λήμμα: Έστω $U \subseteq M$ ανοιχτό
με $p \in U$ αλλά $q \notin U$. $\Rightarrow \exists$ $k = \overline{V} \subseteq U$ ώστε αν $q \notin V$
τότε $d_g(p,q) \geq D > 0$. Αφού $q \notin U \Rightarrow q \notin V$ άρα ΟΚ.

<u>Συμπέρασμα</u> (M, d_g) είναι μετρικός χώρος

Θα δούμε ότι η τοπολογία του (M, d_g) είναι ίδια με την
αρχική τοπολογία της M ως διαφορική πολλ/τα. Δηλαδή
$U \subseteq M$ ανοιχτό $\Leftrightarrow \forall$ $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ $\rightarrow$ ανοιχτή μπάλα του (M, d_g)

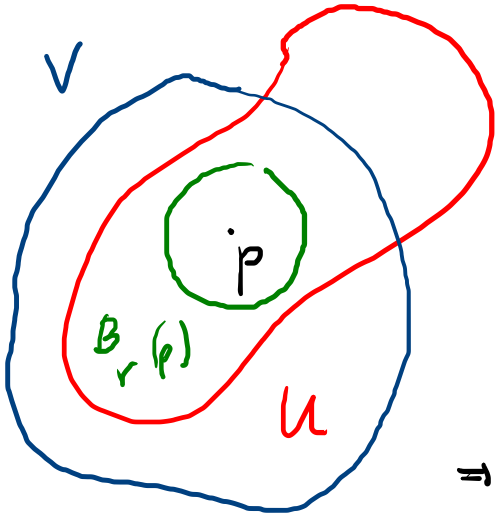
(i) Έστω $U \subseteq M$ ανοιχτό και $p \in U$. Εφαρμόζουμε το προηγ. Λήμμα για να πάρουμε $V \subseteq U$ ανοιχτό, $p \in V$ και $D > 0$ ώστε

$$q \notin V \Rightarrow d_g(p,q) \geq D$$

Ισοδύναμα, $d_g(p,q) < D \Rightarrow q \in V \subseteq U$

Δηλαδή $B_D(p) \subseteq U \Rightarrow U$ ανοιχτό στην τοπολογία της (M, d_g)

(ii) Έστω ότι $U \subseteq M$ είναι ανοιχτό στην τοπολογία της (M, d_g), $p \in U$ και $\delta > 0$ ώστε $B_\delta(p) \subseteq U$



Εφαρμόζουμε το Λήμμα για το $p \in M$ και βρίσκουμε $V \subseteq M$ ανοιχτό (στην τοπολογία της M), $p \in V$ (V, φ) C^∞ χάρτης, $\hat{g} = \varphi^* g_{\mathbb{R}^n}$ και $\exists\ C > 0$ ώστε $d_g(p,q) \leq C\, d_{\hat{g}}(p,q)$ $\forall\ q \in V$

$$\Rightarrow d_{\hat{g}}(p,q) < \frac{\delta}{C} \Rightarrow d_g(p,q) < \delta \Rightarrow q \in B_\delta(p) \subseteq U$$

$$\Rightarrow \quad \{ q \in V \mid d_{\bar g}(p,q) < \tfrac{\delta}{c} \} \subseteq U$$

$$\overset{\shortparallel}{\varphi^{-1}\big(\underbrace{B_{\delta/c}(\varphi(p))}\big)} \subseteq M$$ ανοιχτό στην τοπολογία της M

και $p \in \varphi^{-1}\big(B_{\delta/c}(\varphi(p))\big)$

Μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ ως προς την $g_{\mathbb{R}^n}$.

$\Rightarrow$ U ανοιχτό ως προς την τοπολογία της M.

<u>Ορισμοί</u>: $\cdot$ (M,g) λέγεται μετρικά πλήρης αν (M,d_g) πλήρης μ. χώρος

$\cdot$ $\operatorname{diam}(M,g) = \operatorname{diam}(M,d_g) = \sup\{d_g(p,q), \ p,q \in M\}$

↳ διάμετρος της (M,g)

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε συμπαγής πολλ/τα Riemann έχει φραγμένη διάμετρο

<u>Απόδ</u>. Συμπαγείς μ. χώροι έχουν πεπερασμένη διάμετρο

Ο Υπερβολικός χώρος

1) Έστω $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ και $g_H = \dfrac{g_{\mathbb{R}^n}}{\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^2}$: $(B_R(0), g_H)$ υπερβολικός χώρος ακτίνας $R>0$

(Μοντέλο του δίσκου Poincaré)

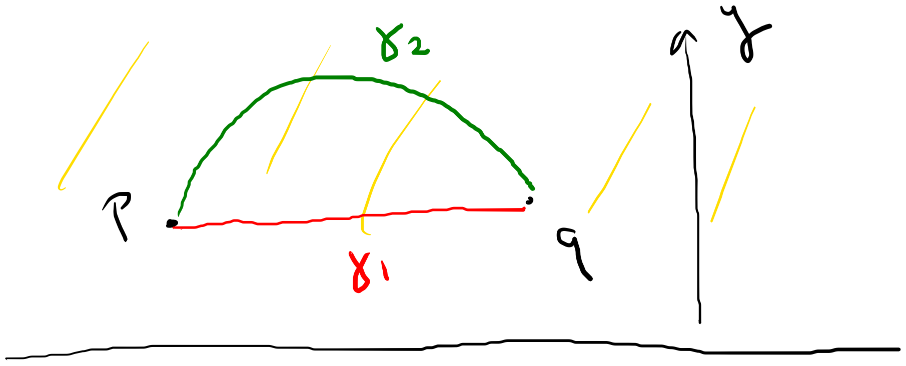
2) Έστω $H_n = \{(x^1, \ldots, x^{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n \mid y > 0\}$ $g_R = \dfrac{R^2}{y^2} g_{\mathbb{R}^n}$

↳ Μοντέλο του άνω-ημιχώρου

<u>Πρόταση</u>: $(B_R(0), g_H)$ και (H_n, g_R) είναι ισομετρικές

πολλαπλότητες Riemann.

<u>Παρατήρηση</u>: Και οι δύο μετρικές Riemann είναι σύμμορφες με την $g_{\mathbb{R}^n}$ σε αντίστοιχο ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^n$



Με τη $g = \frac{1}{y^2}\, g_{\mathbb{R}^2}$.

Ενώνονται τα p και q "συμφέρει" να ακολουθήσουμε ένα μονοπάτι της μορφής γ_2, αντί για το ευθ. τμήμα γ_1

$$\frac{1}{y^2} \searrow 0$$