VII

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

VII.1 Διανυσματικοί χώροι με νόρμα

Ορισμός VII.1.1. Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα είναι ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$ των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, συνοδευόμενος με μια νόρμα ή απόλυτη τιμή, συμβολίζεται με $\|\cdot\| : V \to \mathbb{F}$ και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες για κάθε διάνυσμα $u, v \in V$ και κάθε $c \in \mathbb{F}$:

1. Θετικά ορισμένη: $\|u\| \geq 0$, και $\|u\| = 0$ αν και μόνο αν $u = \mathbf{0}$.
2. Ομογένεια: $\|cu\| = |c|\|u\|$
3. Τριγωνική Ανισότητα: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Παρατήρηση VII.1.2. Στην δεύτερη σχέση το $|c|$ είναι η απόλυτη τιμή ενός στοιχείου του $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ ή είναι το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $|c| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 c + \mathrm{Im}^c}$ αν $c \in \mathbb{C}$.

Παρατήρηση VII.1.3. Είναι σαφές από τα αξιώματα της νόρμας ότι $\|v\| \geq 0$ για κάθε $v \in V$. Πράγματι,

$$0 = \|v - v\| \leq \|v\| + \| - v\| = 2\|v\|.$$

Παρατήρηση VII.1.4. Ισχύει

$$|\|v\| - \|u\|| \leq \|v - u\| \text{ για κάθε } v, u \in V.$$

Πράγματι,

$$\|u\| = \|(u - v) + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|,$$

δηλαδή $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$ και αλλάζοντας τους ρόλους των u, v έχουμε $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\| = \|u - v\|$ δηλαδή

$$-\|u\| + \|v\| \leq \|u - v\| \leq \|u\| - \|v\|,$$

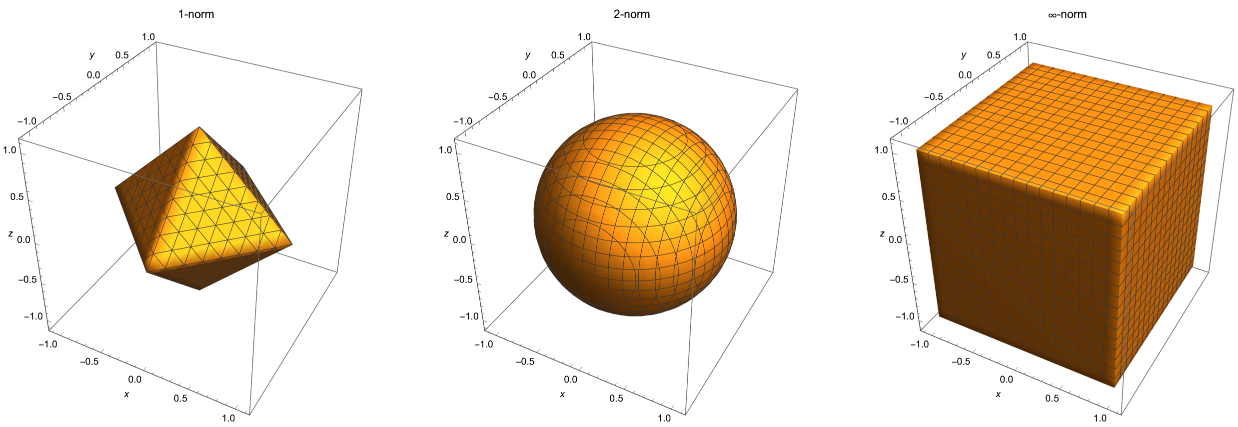
το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Παραδείγματα VII.1.5. 1. Ο χώρος $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Ο χώρος $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}$.

3. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ με

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \text{ όπου } x = (x_1, \ldots, x_n).$$



Σχήμα VII.1: Οι μοναδιαίες μπάλες $B = x : \|x\| \le 1$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$ για $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

4. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ με

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \text{ όπου } x = (x_1, \dots, x_n).$$

5. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ με

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \text{ όπου } x = (x_1, \dots, x_n).$$

6. Ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ των συνεχών συναρτήσεων με νόρμα

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

   Στο παραπάνω είναι σημαντικό η f να είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα ώστε να έχει μέγιστο.

Παρατήρηση VII.1.6. Σε ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας (v_n) στοιχείων $v_n \in V$ στο $v \in V$ ως εξής:

Το όριο $\lim_{n->\infty} v_n = v$ αν και μόνο αν

$$\text{Για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ ώστε για } n > n_0 \text{ ισχύει } \|v_n - v\| < \epsilon.$$

Οι ιδιότητες του ορίου τέτοιων ακολουθιών είναι παρόμοιες με αυτές που ισχύουν για τα όρια ακολουθιών πραγματικών αριθμών γιατί ισχύουν οι ιδιότητες της νόρμας που είναι παρόμοιες με αυτές της απόλυτης τιμής, την οποία και γενικεύουν.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Επιλέγοντας μια βάση B έχουμε ένα ισομορφισμό $[\cdot]_B : V \to \mathbb{R}^n$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα ως εξής:

$$\|v\|_V = \|[v]_B\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Δηλαδή μετράμε με μια νόρμα του $\mathbb{R}^n$ τις συντεταγμένες του διανύσματος. Η νόρμα αυτή εξαρτάται από την επιλογή της βάσης. Θα ορίσουμε μια έννοια ισοδυναμίας νορμών και θα δείξουμε στην πρόταση VII.1.11 ότι η εξάρτηση αυτή από την βάση δεν πειράζει και πολύ αφού όλες οι νόρμες σε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο είναι ισοδύναμες.

Ορισμός VII.1.7. Θα λέμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ και $\|\cdot\|' : V \to \mathbb{R}$ είναι ισοδύναμες αν υπάρχουν σταθερές $A > 0, B > 0$ ώστε

$$A\|v\|' \le \|v\| \le B\|v\|' \text{ για κάθε } v \in V.$$

Παρατήρηση VII.1.8. Η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή

- Κάθε νόρμα είναι ισοδύναμη με τον εαυτό της. Πράγματι, αρκεί να διαλέξουμε $A, B = 1$.
- Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|'$ δηλαδή υπάρχουν A, B ώστε να ισχύουν

$$A\|v\|' \le \|v\| \le B\|v\|' \Rightarrow B^{-1}\|v\| \le \|v\|' \le A^{-1}\|v\|$$

- Αν η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|''$ δηλαδή υπάρχουν A_1, A_2 και B_1, B_2 ώστε

$$A_1\|v\|' \le \|v\| \le B_1\|v\|'$$
$$A_2\|v\|'' \le \|v\|' \le B_2\|v\|''$$

  τότε

$$A_1A_2\|v\|'' \le A_1\|v\|' \le \|v\| \le B_1\|v\|' \le B_1B_2\|v\|$$

  δηλαδή και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|''$.

Η έννοια της νόρμας σε ένα χώρο μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε όρια.

Ορισμός VII.1.9. Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_m) στοιχείων του V συγκλίνει στο $a \in V$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $\|a_n - a\| < \epsilon$.

Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_m) στοιχείων του V είναι Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, \ell \ge n_0$ να ισχύει $\|a_m - a_\ell\| < \epsilon$.

Τέλος ο χώρος V θα λέγεται πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία Cauchy σε αυτόν έχει όριο στον V.

Παρατήρηση VII.1.10. Αν οι μετρικές $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες τότε αν το όριο της (a_n) ως προς την $\|\cdot\|$ υπάρχει και είναι $a \in V$ τότε το όριο υπάρχει και ως προς την $\|\cdot\|'$ και είναι επίσης a.

Πρόταση VII.1.11. *Όλες οι νόρμες σε ένα πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο πάνω από ένα πλήρες σώμα είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα πλήρες σώμα $\mathbb{F}$ ως προς την νόρμα $|\cdot|$. Θα κάνουμε επαγωγή ως προς την διάσταση n του V. Η περίπτωση $\{\mathbf{0}\}$ είναι τετριμμένη. Ας υποθέσουμε ότι $\dim V = 1$ και έστω $v_0 \neq \mathbf{0}$ ένα στοιχείο του V, οπότε $V = \mathbb{F}v_0$, οπότε $\|cv_0\| = |c|\|v_0\|$. Συνεπώς δύο νόρμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ στον μονοδιάστατο χώρο V είναι η μία πολλαπλάσιο της άλλης.

Υποθέτουμε ότι $n \ge 2$ και ότι η πρόταση ισχύει για όλους τους διανυσματικούς χώρους διάστασης $n-1$. Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n. Διαλέγουμε μια $\mathbb{F}$ βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του V. Για μια οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ του V θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμη με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ η οποία ορίζεται ως

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right\| = \max_{1 \le i \le n} |c_i|.$$

Παρατηρούμε ότι ο V ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ είναι πλήρης διότι αν έχουμε μια ακολουθία Cauchy (w_n) στον V ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για $\ell, m > n_0$ έχουμε $\|a_\ell - a_m\| < \epsilon$. Γράφοντας τα a_m ως προς την βάση $v_1, \dots, v_n$ έχουμε ότι

$$a_m = c_{1m}v_1 + \cdots + c_{nm}v_n$$

οπότε ο ορισμός της $\|\cdot\|_\infty$ δίνει ότι οι οι ακολουθίες $(c_{im})_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ως προς την $|\cdot|$, και λόγω πληρότητας υπάρχει το όριο $c_i = \lim_{m\to\infty} c_{im}$. Τότε το $a = \sum c_i v_i$ είναι το όριο της (a_m) στον V:

$$\|a - a_m\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |c_i - c_{im}| \to 0.$$

Θα πρέπει να βρούμε σταθερές ώστε

$$A\|v\|_\infty \le \|v\| \le B\|v\|_\infty.$$

Το τυχαίο $v \in V$ το γράφουμε $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$. Έχουμε

$$\|v\| \le \sum_{i=1}^{n} \|c_i v_i\| = \sum_{i=1}^{n} |c_i|\|v_i\| \le B \max |c_i| = B\|v\|_\infty,$$

όπου $B = \sum_{\|v\|} > 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει $A > 0$ ώστε $A\|v\|_\infty \le \|v\|$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν είναι σωστό για κανένα A, οπότε για κάθε $A = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$ υπάρχει ένα $u_k \in V$, ώστε

$$\|u_k\| < (1/k)\|u_k\|_\infty.$$

Από τον ορισμό του $\|\cdot\|_\infty$ σε όρους της βάσης $v_1, \dots, v_n$ έχουμε ότι το $\|u_k\|_\infty$ είναι η απόλυτη τιμή κάποιας συντεταγμένης του u_k. Αφού το σύνολο u_k είναι άπειρο και υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία της βάσης $v_1, \dots, v_n$, υπάρχει κάποιος δείκτης i, $1 \le i \le n$ για τον οποίο ισχύει ότι άπειρα u_k έχουν $\|u_k\|$ ίσο με την συντεταγμένη που αντιστοιχεί στο v_i στοιχείο της βάσης. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = n$. Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε το u_k με κάποιο μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{F}$ η ανισότητα $\|u_k\| < (1/k)\|u_k\|_\infty$ παραμένη σε ισχύ, αφού και τα δύο μέλη της πολλαπλασιάζονται με το ίδιο στοιχείο.

Έτσι μπορούμε, αφού περάσουμε σε κάποια υποακολουθία $\{u_{k_j}\}$ να υποθέσουμε ότι

1. $\|u'_{k_j}\|_\infty = 1$,
2. Η συντεταγμένη του v_n του u'_{k_j} να είναι ίση με 1.
3. $\|u'_{k_j}\| < (1/k_j)\|v'_{k_k}\|_\infty = 1/k_j$.

Αφού το $k_j \to \infty$ όταν $j \to \infty$ έχουμε ότι $\|u'_{k_j}\| \to 0$, όταν $j \to \infty$. Θέτουμε $w_j = u'_{k_j} - v_n$, οπότε w_j ανήκει στον χώρο $W = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ και έχουμε

$$\|w_j + v_n\| = \|u'_{k_j}\| \to 0 \tag{VII.1}$$

Θεωρούμε τις διαφορές

$$\|w_j - w_{j'}\| = \|(w_j + v_n) - (w_{j'} + v_n)\| \le \|(w_j + v_n)\| - \|(w_{j'} + v_n)\| \to 0. \tag{VII.2}$$

Συνεπώς η ακολουθία w_j είναι ακολουθία Cauchy στον W ως προς την $\|\cdot\|$ περιορισμένη στον W.

Αφού ο χώρος W έχει διάσταση $n - 1$ από την επαγωγική υπόθεση όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες σε αυτόν, συνεπώς $\|\cdot\|_\infty \le C\|\cdot\|$ και $\|\cdot\| \le C'\|\cdot\|_\infty$ στον W για κάποια $C > 0, C' > 0$. Από την (VII.2) έχουμε ότι

$$\|w_j - w_{j'}\|_\infty \le C\|w_j - w_{j'}\| \to 0.$$

Συνεπώς η ακολουθία w_j είναι ακολουθία Cauchy στον W ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ περιορισμένη στον W. Ο χώρος $(W, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης οπότε υπάρχει ένα όριο w για τα w_j ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, δηλαδή

$$\|w - w_j\|_\infty \to 0.$$

Τότε $\|w - w_j\| \le C'\|w - w_j\|_\infty - > 0$ συνεπώς $\|w - w_j\| \to 0$. Σε συνδυασμό με την (VII.1) έχουμε ότι

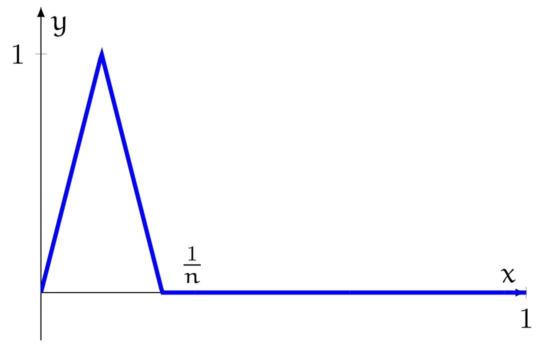
$$\|w + v_n\| = \|(w - w_j) + (w_j + v_n)\| \le \|w - w_j\| + \|w_j + v_n\| \to 0$$

οπότε $w = -v_n$, όμως $w \in W$ και $-v_n \notin W$, από όπου έχουμε μια αντίφαση. □

Παρατήρηση VII.1.12. Η πρόταση VII.1.11 δεν ισχύει αν η διάσταση του V δεν είναι πεπερασμένη. Για παράδειγμα στον χώρο $C([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζονται οι νόρμες

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)| \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Είναι σαφές ότι $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ αλλά δεν υπάρχει C ώστε $\|f\| \le C\|f\|_1$. Μπορούμε να διαλέξουμε τις συναρτήσεις $f_n(x)$ οι οποίες να είναι 0 στο διάστημα $(1/n, 1)$ και να έχουν το τρίγωνο σχήμα με κορυφή 1 στο $1/2n$ όπως στο παρακάτω σχήμα:



Η ακολουθία f_n συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση με την $\|\cdot\|_1$ νόρμα αφού το εμβαδόν της διαφοράς τείνει στο 0 αλλά όχι με την $\|\cdot\|_\infty$ αφού η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ βλέπει την μεγαλύτερη τιμή της $f_n(x)$ που είναι 1.

VII.2 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιορίσουμε το σώμα $\mathbb{F}$ στην περίπτωση που $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Ορισμός VII.2.1. Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$, με ένα εσωτερικό γινόμενο που συμβολίζεται ως

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

για κάθε όλα τα $u, v, w \in V$ και κάθε $c \in \mathbb{F}$

1. Γραμμικότητα ως προς το πρώτο όρισμα: $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$
2. Συζυγής Συμμετρία: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
3. Γραμμικότητα ως προς το δεύτερο όρισμα: $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
4. Θετικά ορισμένη:$\langle u, u \rangle \ge 0$, και $\langle u, u \rangle = 0$ αν και μόνο αν $u = \mathbf{0}_V$.

Παραδείγματα VII.2.2. 1. Θεωρούμε τα στοιχεία $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

2. Θεωρούμε τα στοιχεία $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό στην βιβλιογραφία είναι γνωστό και ως ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο.

Γιατί δεν ορίσαμε και στους μιγαδικούς αριθμούς το εσωτερικό γινόμενο όπως και στους πραγματικούς; Δηλαδή

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

και βάλαμε μια συζυγία στα y_i; Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου χρειαζόμαστε

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

το οποίο δεν μπορεί να εξασφαλιστεί αν $x_i \in \mathbb{C}$ αφού τα τετράγωνα μπορεί να είναι αρνητικά. Ούτε μπορούμε να εξασφαλίσουμε με αυτόν τον ορισμό ότι

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Αντιθέτως για το ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

από το οποίο προκύπτουν οι ζητούμενες ιδιότητες του γινομένου.

3. Για τους πραγματικούς αριθμούς $a < b$ θεωρούμε τον χώρο $C([a, b])$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} C([a, b]) \times C([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(t) g(t) dt, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $C([a, b])$.

4. Θεωρούμε τον χώρο $X := \{f : [a, b] \to \mathbb{C}, f \text{ συνεχής}\}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο X.

Άσκηση VII.2.3. Έστω $V = \mathbb{C}^{n,n}$. Η συνάρτηση $V \times V \to V$, $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$, όπου $B^* = \overline{B}^t$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Αν $B = (b_{ij})$ τότε $\overline{B}$ είναι ο πίνακας $(\overline{b}_{ij})$, δηλαδή έχουμε εφαρμόσει την μιγαδική συζυγία σε κάθε στοιχείο του πίνακα B.

Λύση VII.2.4. Ο χώρος των $n \times n$ πινάκων μπορεί να ταυτιστεί με το $\mathbb{C}^{n^2}$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\overline{b}_{i\nu},$$

δηλαδή ταυτίζεται με το ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^{n^2}$.

Άσκηση VII.2.5. Θεωρούμε το σύνολο $V = \mathbb{C}^n$ το οποίο το ταυτίζουμε με πίνακες στήλες. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ θεωρούμε την συνάρτηση $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_A = x^*A^*Ay$. Δείξτε ότι είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

Λύση VII.2.6. Αν $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι το κανονικό ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο τότε παρατηρούμε ότι

$$\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, Ay\rangle_H,$$

οπότε οι ζητούμενες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ελέγχονται εύκολα με την βοήθεια του ερμητιανού εσωτερικού γινομένου.

Άσκηση VII.2.7. Δίνεται ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ σε ένα διανυσματικό χώρο με βάση $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Να αποδειχθεί ότι οι τιμές $\langle v_i, v_j\rangle$ καθορίζουν πλήρως το εσωτερικό γινόμενο. Επιπλέον δείξτε ότι αν $[x]_B = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $[y]_B = (y_1, \ldots, y_n)^t$ τότε

$$\langle x, y\rangle = \overline{y}^t Qx = y^*Qx, \tag{VII.3}$$

όπου ο Q είναι ο πίνακας $Q = (q_{ij})$ με $q_{ij} = \langle v_j, v_i\rangle$.

Λύση VII.2.8. Θωρούμε δύο στοιχεία x, y τα οποία τα εκφράζουμε με μοναδικό τρόπο ως γραμμικούς συνδυασμούς

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

και υπολογίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j}\langle v_i, v_j\rangle$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση VII.2.9. Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο από μια σχέση στις συντεταγμένες όπως δίνεται στην εξίσωση (VII.3) είναι να ισχύει $Q = Q^*$ και $x^*Qx > 0$ όταν $x \neq 0$.

Λύση VII.2.10. Ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο από την εξίσωση $\langle x, y\rangle = y^*Qx$. Η απαίτηση $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ προκύπτει από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Το ίδιο και η ιδιότητα $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Υπολογίζουμε ότι

$$\langle x, y\rangle = y^*Qx, \quad \langle y, x\rangle = x^*Qy,$$

και

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \langle y, x\rangle^* = (x^*Qy)^* = y^*Q^*x.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι ίση με $\langle x, y\rangle = y^*Qx$ αν και μόνο αν $Q^* = Q$. Πράγματι η ποσότητα $e_i^*Qe_j = q_{ij}$.

Τέλος η συνθήκη $x^*Qx > 0$ προκύπτει από την συνθήκη $\langle x, x\rangle > 0$ και $\langle x, x\rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

Άσκηση VII.2.11. Αποδείξτε ότι ο τύπος

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{a_i b_j}{i+j+1},$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$.

Λύση VII.2.12. Γνωρίζουμε ότι στον χώρο $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$ το

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Αν περιοριστούμε στον υπόχωρο των πολυώνυμων και ιδιαίτερα στην βάση $\{1, x, x^2, \ldots\}$ έχουμε ότι

$$\langle x^i, x^j\rangle = \int_0^1 t^{i+j}dt = \frac{1}{i+j+1},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

VII.3 Ανισότητα Cauchy-Schwartz

Ορισμός VII.3.1. Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ορίζεται μια συνάρτηση

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, x\rangle^{1/2} \end{aligned}$$

Πρόταση VII.3.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwartz*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|, \text{ για κάθε } x, y \in X. \tag{VII.4}$$

Απόδειξη. Αν $y = 0$ τότε η ανισότητα (VII.4) ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε ότι $y \neq 0$. Για ένα $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύει $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \ge 0$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle &= \langle x, x-\lambda y\rangle - \lambda\langle y, x-\lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle, \end{aligned}$$

συνεπώς $\langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \ge 0$. Επιλέγουμε $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ οπότε καταλήγουμε στο

$$\langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle$$

και συνεπώς

$$\langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle \ge 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

ή ισοδύναμα

$$|\langle x, y\rangle| \le \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

□

Παρατήρηση VII.3.3. Αν είχαμε ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο θα μπορούσαμε απλούστερα να γράψουμε την σχέση

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Η παραπάνω σχέση είναι θετική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε η τετραγωνική εξίσωση στο λ έχει αρνητική διακρίνουσα δηλαδή

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

και η ανισότητα (VII.4) έπεται.

Παρατήρηση VII.3.4. Οι ανισότητες

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{1/2} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

για μιγαδικούς αριθμούς $x_i, y_i, i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 \right)^{1/2}$$

για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwartz στους χώρους $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και $\big(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle \big)$.

Πρόταση VII.3.5. *Για ένα χώρο $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο η συνάρτηση $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ που ορίστηκε στον ορισμό VII.3.1 είναι μια νόρμα.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$. Επίσης είναι σαφές ότι

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \overline{\lambda})^{1/2} \langle x, x \rangle^{1/2} = |\lambda| \|x\|.$$

Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\overset{(\mathrm{VII.4})}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

από την οποία έπεται η τριγωνική ανισότητα. □

Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεώρημα VII.3.6.

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ για κάθε } x, y \in X \tag{VII.5}$$

ή γενικότερα

$$\text{Αν για κάθε } i \neq j \text{ έχουμε } \langle x_i, x_j \rangle = 0 \text{ τότε } \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2. \tag{VII.6}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

η οποία για $\langle x,y\rangle = 0$ δίνει την εξίσωση (VII.5). Θα αποδείξουμε την γενίκευση της με επαγωγή, την έχουμε ήδη αποδείξει στην περίπτωση $n = 2$. Θεωρούμε ότι ισχύει στην περίπτωση n η

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$$

και θα υπολογίσουμε το άθροισμα $\|x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}\|^2$. Είναι σαφές ότι $\langle x_1+x_2+\cdots+x_n, x_{n+1}\rangle = 0$ συνεπώς έχουμε

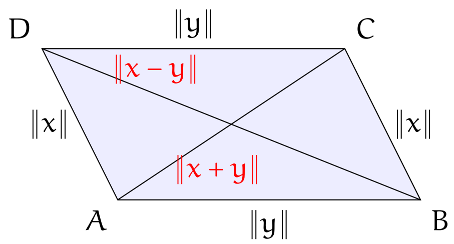
$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}\|^2 = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2.$$

□

Πρόταση VII.3.7. *Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot\rangle)$ ισχύει η ισότητα του παραλληλογράμμου*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Αντιστρόφως αν σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, ισχύει η παραπάνω ισότητα τότε η νόρμα προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.



Σχήμα VII.2: Γεωμετρική αναπαράσταση της ισότητας του παραλληλογράμμου. Τα $\|x\|, \|y\|$ είναι τα μήκη των πλευρών και $\|x+y\|, \|x-y\|$ είναι τα μήκη των διαγωνίων.

Απόδειξη. Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

οπότε προκύπτει η ισότητα του παραλληλογράμμου.

Αντιστρόφως, αν ισχύει η ισότητα του παραλληλογράμμου τότε το

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{VII.7}$$

στην περίπτωση που ο διανυσματικός χώρος είναι πραγματικός και το

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

στην περίπτωση που ο διανυσματικός χώρος είναι μιγαδικός, ορίζουν εσωτερικό γινόμενο από το οποίο παράγεται η νόρμα $\|\cdot\|$.

Θα αποδείξουμε πρώτα την πραγματική περίπτωση. Υποθέτουμε ότι η νόρμα ικανοποιεί τον νόμο του παραλληλογράμμου, και θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την εξίσωση (VII.7). Είναι σαφές ότι ικανοποιούνται οι ταυτότητας $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ και $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$.

Παρατηρούμε ότι $\langle x+y+z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$. Πράγματι, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε ότι

$$\|x + y + z\|^2 + \|x - y + z\|^2 = 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}\|x + y + z\|^2 &= 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y + z\|^2\\ &= 2\|y + z\|^2 + 2\|x^2\| - \|y - x + z\|^2,\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη γραμμή προκύπτει εναλλάσσοντας τους ρόλους των x, y. Συνεπώς

$$\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 - \frac{1}{2}\|x - y + z\|^2 - \frac{1}{2}\|y - x + z\|^2.$$

Με αντικατάσταση του z με $-z$ στην τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$\|x + y - z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 - \frac{1}{2}\|x - y - z\|^2 - \frac{1}{2}\|y - x - z\|^2.$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2\right)\\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\end{aligned}$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη ιδιότητα ισχύει για $\lambda = -1$, ενώ με βάση την προσθεική ιδιότητα και επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$ και αφού ισχύει και για $\lambda = -1$ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}$. Αν τώρα $\lambda = p/q$ με $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ τότε για $x' = x/q$ έχουμε ότι

$$q\langle \lambda x, y\rangle = q\langle px', y\rangle = p\langle qx', y\rangle = p\langle x, y\rangle,$$

οπότε διαιρώντας με q έχουμε την ζητούμενη ιδιότητα:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \text{ για κάθε } x, y \in V, \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Για να μπορέσουμε να περάσουμε σε $\lambda \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(t) : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto \frac{1}{t}\langle tx, y\rangle\end{aligned}$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή για κάθε ακολουθία (a_n) με $a_n \to l$ έχουμε $f(a_n) \to f(l)$. Επίσης παρατηρούμε ότι η $f(t) = \langle x, y\rangle$ για κάθε $t \in \mathbb{Q}$. Οπότε αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$, διαλέγουμε μια ακολουθία ρητών αριθμών (a_n) με $a_n \to \lambda$ και έχουμε ότι $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, y\rangle$, δηλαδή το ζητούμενο. Η περίπτωση $\lambda = 0$ είναι προφανής.

Τέλος για την περίπτωση του μιγαδικού εσωτερικού γινομένου παρατηρούμε ότι $i\langle x, y\rangle = i\langle x, y\rangle$ και ότι $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Για την απόδειξη της γραμμικότητας επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα που εφραμόσαμε στο πραγματικό εσωτερικό γινόμενο για το πραγματικό $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ και το φανταστικό $\mathrm{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle$ μέρος του $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

VII.3.1 Γωνία διανυσμάτων

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz (VII.4) εξασφαλίζει ότι στην περίπτωση πραγματικού εσωτερικού γινομένου

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

και συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την γωνία θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ των διανυσμάτων x, y ώστε

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\theta).$$

Στην περίπτωση που $\langle x, y\rangle = 0$ θα λέμε ότι τα x, y είναι κάθετα.

Ορισμός VII.3.8. Ένα σύνολο στοιχείων $S = \{e_\mu \in V, \mu \in I\}$ θα λέγεται ορθογώνιο αν και μόνο αν $\langle e_\mu, e_\nu\rangle = \delta_{i,j}\|e_\mu\|^2$. Θα λέγεται ορθοκανονικό αν επιπλέον $\|e_\mu\| = 1$ για κάθε $\mu \in I$.

Παρατήρηση VII.3.9. Ένα ορθογώνιο σύνολο S μπορεί να μετασχηματιστεί σε ορθοκανονικό $S' = \{e_\mu/\|e_\mu\| : \mu \in I\}$.

Πρόταση VII.3.10. *Ένα ορθογώνιο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Πράγματι για οποιαδήποτε πεπερασμένη επιλογή $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ από το ορθογώνιο σύνολο και σχέση

$$\mathbf{0}_V = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu e_{i_\nu}$$

έχουμε ότι

$$\mathbf{0}_V = \langle \mathbf{0}_V, e_{i_j}\rangle = \left\langle \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu e_{i_\nu}, e_{i_j} \right\rangle = \sum \nu = 1^r \lambda_\nu \langle e_{i_\nu}, e_{i_j} = \lambda_j,$$

□

δηλαδή όλοι οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι μηδενικοί.

Πρόταση VII.3.11 (Ανάλυση Fourier)**.** *Αν σε ένα διανυσματικό χώρο έχουμε μια ορθοκανονική βάση $e_1, \ldots, e_n$, τότε για κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται ως*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Απόδειξη. Αφού τα $e_1, \ldots, e_n$ είναι βάση, το τυχαίο στοιχείο $v \in V$ γράφεται ως

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu v.$$

Υπολογίζουμε ότι

$$\langle v, e_i\rangle = \langle \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e_\nu, e_i\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \langle e_\nu, e_i\rangle = \lambda_i.$$

□

Θεωρία αναπαραστάσεων...

Παράδειγμα VII.3.12. Θεωρούμε τον χώρο

$$X := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : f(0) = f(2\pi), f \text{ συνεχής }\}.$$

Ο χώρος αυτός μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο των περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Στον χώρο αυτό εισάγουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις

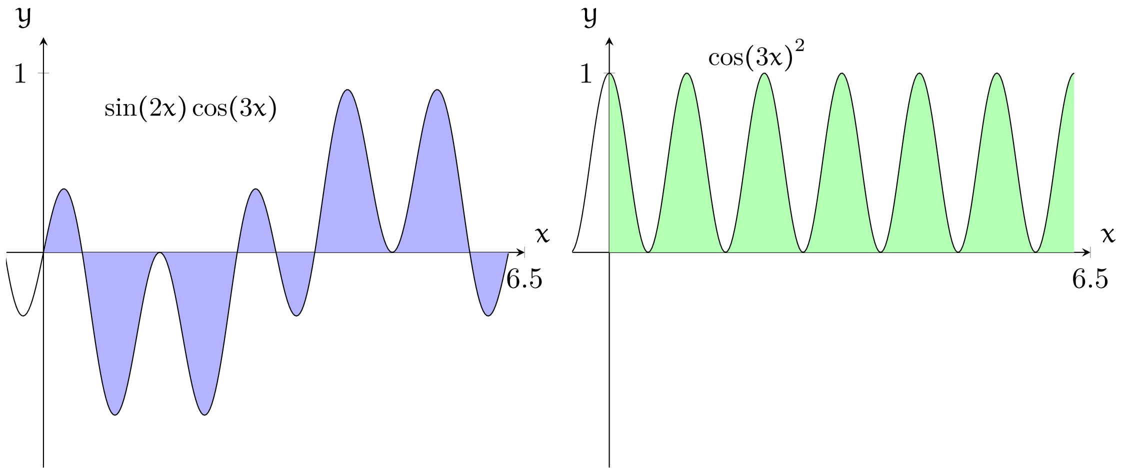
$$e_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(s), e_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(s), \dots, e_{2\nu-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\nu s), e_{2\nu}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\nu s), \dots$$

είναι στοιχεία του χώρου X, και μάλιστα ότι

$$\langle e_\nu, e_\mu\rangle = \delta_{\nu,\mu} \text{ για } \nu, \mu \in \mathbb{N}.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(\nu t)\sin(\mu t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\big((\nu-\mu)t\big) - \cos\big((\nu+\mu)t\big)\Big)dt = \pi\cdot\delta_{\nu,\mu}\\
\int_0^{2\pi} \cos(\nu t)\cos(\mu t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\big((\nu-\mu)t\big) + \cos\big((\nu+\mu)t\big)\Big)dt = \pi\cdot\delta_{\nu,\mu}\\
\int_0^{2\pi} \sin(\nu t)\cos(\mu t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\sin\big((\nu-\mu)t\big) + \sin\big((\nu+\mu)t\big)\Big)dt = 0\\
\int_0^{2\pi} e_0(t)e_\mu(t)dt &= \delta_{0,\mu}.
\end{aligned}$$



Σχήμα VII.3: Το αριστερό εμβαδόν είναι 0, τα εμβαδά κάτω από τον άξονα των x είναι αρνητικά. Το δεξί εμβαδόν είναι π

VII.4 Μια εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις

VII.4.1 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Ας ξεκινήσουμε για προθέρμανση με το εξής πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων: Να βρεθεί μια συνάρτηση $f(x)$ ώστε

$$f'(x) = \lambda f(x). \tag{VII.8}$$

Αν υποθέσουμε ότι έχει αναλυτική λύση

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

τότε η εξίσωση (VII.8) μας δίνει ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i i x^{i-1} = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

από όπου προκύπτει ότι

$$a_{i+1} = a_i \lambda / i, \text{ συνεπώς } a_i = \frac{\lambda^i}{i!} a_0.$$

και καταλήγουμε στην

$$f(x) = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = a_0 e^{\lambda x}.$$

VII.4.2 Ο εκθετικός πίνακας

Έχουμε ήδη δει ότι έχει νόημα να ορίσουμε για $A \in \mathbb{F}^{n,n}$ και $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ τον πίνακα

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in \mathbb{F}^{n,n}.$$

Θέλουμε να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό για συναρτήσεις οι οποίες εκφράζονται μέσω δυναμοσειρών όπως τις ορίσαμε στην παράγραφο I.9.7. Για παράδειγμα ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι ο εκθετικός πίνακας

$$\exp(A) := \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}.$$

Για ένα τέτοιο πίνακα χρειαζόμαστε την έννοια της σύγκλισης. Θα χρειαστεί να εισάγουμε μερικές έννοιες για νόρμες πινάκων. Ο χώρος των $n \times n$ πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος, διάστασης n^2 οπότε μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της νόρμας όπως κάναμε στην παράγραφο VII.1. Χρειαζόμαστε νόρμες οι οποίες να σέβονται την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων

Ορισμός VII.4.1. Μια νόρμα στον χώρο των $n \times n$ πινάκων θα λέγεται υποπολλαπλασιαστική αν και μόνο αν ισχύει

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Επίσης, θα λέμε ότι η νόρμα πινάκων είναι συμβατή με την νόρμα του διανυσματικού χώρου αν ισχύει

$$\|Av\| \leq \|A\| \|v\|.$$

Ορισμός VII.4.2. Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Από κάθε νόρμα διανυσματικών χώρων $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε την *επαγόμενη νόρμα*

$$\|A\| = \max_{v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v \in \mathbb{F}^n : \|v\| = 1} \|Av\|. \tag{VII.9}$$

Λήμμα VII.4.3. *Η εξίσωση (VII.9) ορίζει νόρμα συμβατή και υποπολλαπλασιαστική. Επιπλέον* $\|\mathbb{I}_n\| = 1$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της νόρμας έχουμε για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \mathbf{0}$

$$\|Av\|/\|v\| \leq \|A\|$$

από όπου προκύπτει ότι η νόρμα είναι συμβατή. Η περίπτωση $v = \mathbf{0}$ είναι προφανής.

Παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας την συμβατότητα της νόρμας, ότι για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|ABv\| \leq \|A\|\|Bv\| \leq \|A\|\|B\|\|v\|$$

από όπου έχουμε ότι

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

από όπου έχουμε ότι η νόρμα είναι υποπολλαπλασιαστική.

Τέλος η νόρμα του $\|\mathbb{I}_n\| = 1$ από τον ορισμό αφού το μέγιστο υπολογίζεται πάνω στην σταθερή ποσότητα $\|v\|/\|v\| = 1$. □

Ασκήσεις από το 2020_03_25.pdf

Λήμμα VII.4.4. *Αν μια σειρά πινάκων ικανοποιεί*

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_i A^i\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_i \leq \infty$$

τότε αυτή συγκλίνει.

Απόδειξη. Ο χώρος των $n \times n$ είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το πλήρες σώμα $\mathbb{F}$ συνεπώς είναι πλήρης. Αυτό σημαίνει ότι μια ακολουθία είναι Cauchy αν και μόνο αν συγκλίνει. Η συνθήκη Cauchy για μια νόρμα πινάκων είναι η

$$\text{Για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ ώστε } n \geq m > n_0 \text{ ισχύει } \left\|\sum_{i=m}^{n} a_n A^n\right\| \leq \epsilon$$

□

Ορισμός VII.4.5. Για σταθερό $A \in \mathbb{F}^{n,n}$ ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση $\mathbb{F} \to \mathbb{F}^{n,n}$ με

$$\exp(Ax) = \sum_{i=0}^{n} \frac{A^n x^n}{n!}.$$

Για να δείξουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι καλά ορισμένη αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα VII.4.4 και να παρατηρήσουμε ότι για μια υποπολλαπλασιαστική νόρμα έχουμε

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} \frac{A^n x^n}{n!}\right\| \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{\|A\|^n |x|^n}{n!}$$

το οποίο συγκλίνει αφού αναπαριστά το $e^{\|A\||x|}$.

Πρόταση VII.4.6. *Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q ώστε $A = Q\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Q^{-1}$ έχουμε*

$$\exp(At) = Q\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})Q^{-1}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε

$$\operatorname{ext}(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = Q\operatorname{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^i t^i}{i!}, \ldots, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^i t^i}{i!}\right)Q^{-1} = Q\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})Q^{-1}.$$

□

Πρόταση VII.4.7. *Έχουμε ότι η παράγωγος*

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A \cdot \exp(At).$$

Απόδειξη.

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i i t^{i-1}}{i!} = A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^{i-1}}{(i-1)!} = A\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = A \cdot \exp(At).$$

□

Πρόταση VII.4.8. *Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ο εκθετικός πίνακας $\exp(A)$ είναι αντιστρέψιμος. Το $\exp(At)$ είναι μια οικογένεια αντιστρέψιμων πινάκων η οποία για $t = 0$ δίνει:*

$$\exp(At)|_{t=0} = \mathbb{I}_n, \quad \frac{d}{dt}\exp(At)|_{t=0} = A.$$

Απόδειξη. Το ότι $\exp(At)|_{t=0} = \exp(\mathbf{0}_{\mathbb{C}^{n,n}}) = \mathbb{I}_n$ προκύπτει από τον ορισμό του εκθετικού πίνακα VII.4.5. Η αντιστρεψιμότητα προκύπτει από το ότι

$$\mathbb{I}_n = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^{n,n}} = \exp(At - At) = \exp(At)\exp(-At).$$

Ειδικότερα έχουμε ότι

$$\exp(At)^{-1} = \exp(-At).$$

□

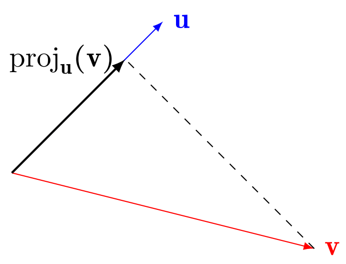
Επιστροφή στις Διαφορικές εξισώσεις

VII.5 Ορθοκανονικοποίηση

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μία μέθοδο η οποία δοσμένου ενός πεπερασμένου συνόλου γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$ σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο δίνει μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ που αυτά παράγουν.

Ορισμός VII.5.1. Η προβολή ενός στοιχείου $v \in V$ επί ενός μη μηδενικού στοιχείου $u \in V$ ορίζεται ως

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u.$$



Σχήμα VII.4: Γεωμετρική αναπαράσταση της προβολής του διανύσματος v στο διάνυσμα u.

Παρατήρηση VII.5.2. Είναι σαφές ότι το διάνυσμα $\mathrm{proj}_u(v)$ είναι παράλληλο στο u και ότι το $v - \mathrm{proj}_u(v)$ είναι κάθετο με το u αφού

$$\langle v - \mathrm{proj}_u(v), u\rangle = \langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\langle u, u\rangle = 0.$$

Η διαδικασία ορθοκανονικοποίησης κατά Gram-Schmidt είναι η παρακάτω:

Μέθοδος 4 (Gram-Schmidt ορθοκανονικοποίηση). *Δίνεται ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $v_1, \dots, v_n$ για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση $e_, \dots, e_n$ του χώρου που παράγουν εκτελούμε τα παρακάτω βήματα:*

1. *Θέτουμε* $u_1 = v_1$
2. *Θέτουμε* $u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2)$
3. *Θέτουμε* $u_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3)$
4. *Θέτουμε* $u_4 = v_4 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_4) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_4) - \mathrm{proj}_{u_3}(v_4)$
5. $\vdots$
6. *Θέτουμε* $u_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_n).$
7. *Θέτουμε* $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}.$

Πρόταση VII.5.3. *Η μέθοδος Gram-Schmidt δίνει πράγματι μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα* $v_1, \dots, v_n$.

Απόδειξη. Πράγματι, παρατηρούμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $u_1, \dots, u_n$ είναι ανά δύο κάθετα. Αυτό για $n = 1$ δεν έχει νόημα και για $n = 2$ το είδαμε στην παρατήρηση VII.5.2. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι τα $u_1, \dots, u_k$ είναι ανά δύο κάθετα και θα δείξουμε ότι και το u_{k+1} είναι κάθετο με όλα τα προηγούμενα. Έχουμε ότι για $1 \le i \le k$

$$\begin{aligned}\langle u_{k+1}, u_i\rangle &= \left\langle v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \mathrm{proj}_{u_j}(v_{k+1}), u_i \right\rangle \\ &= \langle v_{k+1}, u_i\rangle - \langle \mathrm{proj}_{u_i}(v_{k+1}), u_i\rangle \\ &= \langle v_{k+1}, u_i\rangle - \frac{\langle v_{k+1}, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle}\langle u_i, u_i\rangle = 0.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα $e_i \in \langle v_1, \dots, v_n$ για $1 \le i \le n$, συνεπώς $\langle e_1, \dots, e_n\rangle \subset \langle v_1, \dots, v_n\rangle$. Τέλος τα $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ως ορθοκανονικό σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο άρα $\langle e_1, \dots, e_n\rangle = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$.

□

Παράδειγμα VII.5.4. Έχουμε τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

από τα οποία θα κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση με την μέθοδο Gram-Schmidt.

Ξεκινάμε με

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$\mathrm{proj}_{u_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \frac{2}{7}u_1$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το u_2 ως εξής:

$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}12\\3\\-6\end{pmatrix}$$

Συνεχίζουμε με

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{u_1}(v_3) &= \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \frac{7}{14}u_1 = \frac{1}{2}u_1 \\ \mathrm{proj}_{u_2}(v_3) &= \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \frac{-21}{27}u_2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}u_3 &= v_3 - \mathbf{proj}_{u_1}(v_3) - \mathbf{proj}_{u_2}(v_3) \\ &= \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{3}{27}\begin{pmatrix}12\\3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/6\\1/3\\-1/6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Τέλος υπολογίζουμε ότι

$$\|u_1\| = \sqrt{14}, \qquad \|u_2\| = \sqrt{27/7}, \qquad \|u_3\| = \|\sqrt{1/6}\|$$

και έχουμε την ορθοκανονική βάση

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}u_1, \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{7/27}u_2, \qquad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \sqrt{6}u_3.$$

VII.5.1 Εφαρμογή σε προβλήματα βελτιστοποίησης

Ορισμός VII.5.5. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $(V, \|\cdot\|)$ με νόρμα και ένα υποσύνολο $\varnothing \neq \Sigma \subset V$. Ένα $x \in \Sigma$ θα λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του $z \in V$ αν ισχύει

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| \text{ για κάθε } y \in V.$$

Παρατήρηση VII.5.6. Ένα τέτοιο στοιχείο μπορεί να μην υπάρχει, θεωρήστε ένα ανοιχτό διάστημα $\Sigma = (0, 1) \in \mathbb{R}$, ή να μην είναι μοναδικό.

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $W \subset V$ ένας υπόχωρος του. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{w_1, \ldots, w_n\}$ του υπόχωρου W και ορίζουμε το στοιχείο

$$x = \langle z, w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle z, w_n \rangle w_n. \tag{VII.10}$$

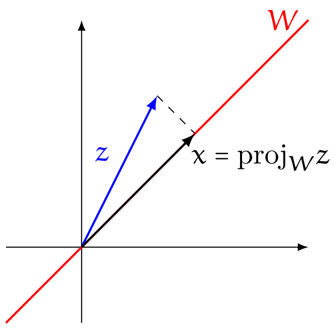
Για κάθε $1 \leq j \leq n$ υπολογίζουμε

$$\langle z - x, w_j \rangle = \langle z, w_j \rangle - \langle x, w_j \rangle = \langle z, w_j \rangle - \langle z, w_j \rangle = 0,$$

λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Συνεπώς το διάνυσμα $z - x$ είναι ορθογώνιο με κάθε γραμμικό συνδυασμό των $w_1, \ldots, w_n$ δηλαδή με κάθε στοιχείο του υποχώρου W:

$$\langle z - x, w \rangle = 0 \text{ για κάθε } w \in W. \tag{VII.11}$$

Το σημείο x είναι η ορθογώνια προβολή του z στον χώρο W. Θα αποδείξουμε ότι το x είναι



Σχήμα VII.5: Προβολή του z στον υπόχωρο W, η διακεκομμένη γραμμή είναι η ελάχιστη απόσταση του z από τον υπόχωρο W.

πραγματικά μια βέλτιστη προσέγγιση του z από στοιχεία του W. Θεωρούμε ένα στοιχείο $y \in W$. Ισχύει ότι $x - y \in W$ και η (VII.11) δίνει $\langle z - x, x - y \rangle = 0$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι

$$\|z - y\|^2 = \|(z - x) + (x - y)\|^2 = \|z - x\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|z - x\|^2,$$

δηλαδή το x είναι μια βέλτιστη προσέγγιση. Αν $x \neq y$ τότε $\|z - y\| > \|z - x\|$, δηλαδή η βέλτιστη προσέγγιση είναι μοναδική.

Παράδειγμα VII.5.7. Θεωρούμε τον χώρο

$$X := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : f(0) = f(2\pi), f \text{ συνεχής } \}.$$

του παραδείγματος VII.3.12 και τον πεπερασμένο υπόχωρο

$$T_n = \left\{ x \in X : x(t) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos(\nu t) + \beta_\nu \sin(\nu s)) \right\}$$

των τριγωνομετρικών πολυώνυμων βαθμού το πολύ n. Οι συναρτήσεις

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_{2\nu-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\nu t), e_{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\nu t), \nu = 1, \dots, n$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του T_n. Η βέλτιστη προσέγγιση μιας τυχαίας περιοδικής συνάρτησης από τον T_n είναι το μερικό άθροισμα της λεγόμενης σειράς Fourier της x:

$$S_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\int_0^{2\pi} x(t)e_\nu(t)dt\right)e_\nu.$$

Η μελέτη των σειρών Fourier είναι κλάδος της Ανάλυσης γνωστός ως Αρμονική Ανάλυση και έχει πολλές εφαρμογές στα Θεωρητικά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, στην Φυσική και στην τεχνολογία.

VII.5.2 Ορθογώνιες προβολές

Έστω ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο και έστω W ένας υπόχωρος. Η μέθοδος Gram-Schmidt μας δίνει μία μέθοδο να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση $B_W = \{e_1, \dots, e_n\}$ του W την οποία μπορούμε να την επεκτείνουμε σε μία ορθοκανονική βάση $B_V = \{e_1, \dots, e_n, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$ του V. Είναι σαφές ότι αν θέσουμε

$$W^\perp = \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_m \rangle$$

τότε

$$V = W \bigoplus W^\perp.$$

Μπορούμε να εφοδιάσουμε τον χώρο των γραμμικών συναρτήσεων $\mathrm{End}(V)$ από τον $V \to V$ με δύο στοιχεία $p_W, p_{W^\perp}$, τις ορθογώνιες προβολές, όπου

$$p_W : \begin{cases} V & \longrightarrow W \subset V \\ w + w' = v & \longmapsto w \end{cases} \qquad p_{W^\perp} : \begin{cases} V & \longrightarrow W^\perp \subset V \\ w + w' = v & \longmapsto w' \end{cases}$$

όπου $v = w + w'$ είναι η μοναδική γραφή του $v \in V$ ως άθροισμα δύο στοιχείων $w \in W, w' \in W^\perp$.

Είναι σαφές ότι $\mathrm{Id}_V = p_W + p_{W^\perp}$, $p_W^2 = p_W$, $p_{W^\perp}^2 = p_{W^\perp}$ και $p_W p_{W^\perp} = p_{W^\perp} p_W$. Τέλος για τους πίνακες των γραμμικών συναρτήσεων $p_W, p^{W^\perp}$ ως προς την βάση B_V έχουμε

$$(p_W, B_V, B_V) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbf{0}_{n,m} \\ \hline \mathbf{0}_{m,n} & \mathbf{0}_{m,m} \end{array}\right) \qquad (p_{W^\perp}, B_V, B_V) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{0}_{n,m} \\ \hline \mathbf{0}_{m,n} & \mathbb{I}_n \end{array}\right)$$

Παρατήρηση VII.5.8. Για ένα πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,m}$ θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $a_1, \dots, a_n$ οι γραμμές του A και έστω $W \subset \mathbb{R}^m$ ο χώρος γραμμών του πίνακα. Είναι σαφές ότι ο χώρος λύσεων του συστήματος ταυτίζεται με τον

$$W^\perp = \{x = (x_1, \dots, x_m)^t \in \mathbb{R}^m : \langle w, x \rangle = 0 \text{ για κάθε } w \in W\}.$$

οπότε ισχύει ότι $\dim W + \dim W^\perp = m$ και επίσης $\dim \mathrm{Im}A + \dim W^\perp = m$, και αφού $\dim \mathrm{Im}(A)$ είναι η διάσταση του χώρου στηλών, έχουμε μια διαφορετική απόδειξη ότι η διάσταση του χώρου γραμμών ταυτίζεται με αυτή του χώρου στηλών.

Άσκηση VII.5.9. Δίνεται ένα σύνολο $u_1, \dots, u_n$ ορθογώνιων διανυσμάτων σε διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε διάνυσμα $v \in V$ ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|\langle v, u_\nu \rangle|^2}{\|u_\nu\|} \leq \|v\|^2$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\langle v, u_\nu \rangle}{\|u_\nu\|} u_\nu.$$

Λύση VII.5.10. Θεωρούμε τον χώρο $W = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$. Γράφουμε το $v \in V$ ως

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\langle v, u_\nu \rangle}{\|u_\nu\|} u_\nu + w'$$

με $w' \in W^\perp$. Αφού για $w = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\langle v, u_\nu \rangle}{\|u_\nu\|} u_\nu$ έχουμε ότι $\langle w, w' \rangle = 0$ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2 \geq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|\langle v, u_\nu \rangle|^2}{\|u_\nu\|}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $w' = 0$.

Άσκηση VII.5.11. Με το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ συνεχής}\}$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Λύση VII.5.12. Ξεκινάμε την διαδικασία Gram-Schmidt. Θέτουμε $u_1 = 1$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε

$$u_2 = x - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1}{2}.$$

Στην συνέχεια θέτουμε

$$u_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} - \frac{\langle x^2, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = x^3 - 1/3 - u_2$$

και

$$\begin{aligned} u_4 &= x^3 - \frac{\langle x^3, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} - \frac{\langle x^3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle x^3, u_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} u_3 \\ &= x^3 - 1/4 - 9/10 u_2 - 3/2 u_3. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε ότι

$$\|u_1\| = 1, \|u_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \|u_3\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}, \|u_4\| = \frac{1}{20\sqrt{7}},$$

οπότε έχουμε την ζητούμενη ορθοκανονική βάση

$$e_1 = 1, e_2 = 2\sqrt{3} u_2, e_3 = 6\sqrt{5} u_3, e_4 = 20\sqrt{7} u_4.$$

Άσκηση VII.5.13. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n,n}$, με το εσωτερικό γινόμενο $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$, όπου για πίνακα $B = (b_{ij})$ ο πίνακας $B^* = \overline{B}^t = (\overline{b}_{ji})$. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου των διαγωνίων πινάκων.

Λύση VII.5.14. Παρατηρούμε ότι οι πίνακες E_{ij} οι οποίοι έχουν μια μονάδα στην i-γραμμή και στην j-στήλη και σε όλες τις άλλες θέσεις του πίνακα έχουν μηδενικά, αποτελούν μια ορθοκανονική βάση ως προς το εσωτερικό γινόμενο που μόλις ορίσαμε. Από την άλλη οι διαγώνιοι πίνακες είναι ο χώρος που παράγουν οι πίνακες $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$. Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ γράφεται ως

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

ενώ

$$\langle A, E_{ii}\rangle = a_{ii}$$

Συνεπώς το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου των διαγωνίων πινάκων αποτελείται από τον διανυσματικό χώρο των πινάκων που έχουν $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$.

VII.5.3 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Υποθέτουμε ότι μια ποσότητα εξαρτάται με γραμμικό τρόπο από τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ δηλαδή εκφράζεται ως συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα $a_1, \dots, a_n$. Σε ένα κόσμο που μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις με όσο μεγάλη ακρίβεια θέλουμε θα αρκούσε να εκτελέσουμε n το πλήθος πειράματα μετρώντας κάθε φορά τις τιμές των $x_1, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και στην συνέχεια να λύσουμε το σύστημα με αγνώστους $a_1, \dots, a_n$. Το πρόβλημα σε αυτή την προσέγγιση είναι ότι δεν είναι δυνατόν ούτε να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια τα $x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)$. Για αυτό τον λόγο κάνουμε μια σειρά πειραμάτων, πολύ περισσότερα από n και στην συνέχεια προσπαθούμε να προσδιορίσουμε όσο γίνεται καλύτερα τις τιμές $a_1, \dots, a_n$ με τον ακόλουθο τρόπο.

Υποθέτουμε ότι στο i πείραμα έχουμε τις τιμές $x_{1i}, \dots, x_{ni}$ και $y_i = f(x_{1i}, \dots, x_{ni})$ για $1 \le i \le m$, $m > n$ οπότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο και αυτό οφείλεται στα λάθη τα οποία υπεισέρχονται στις πειραματικές μετρήσεις. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα $a_1, \dots, a_n$ ελαχιστοποιώντας την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{m}(a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + \cdots a_nx_{ni} - y_i)^2.$$

Αν τον πίνακα

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

τότε ζητάμε να διαλέξουμε διάνυσμα $a = (a_1, \dots, a_n)^t$ ώστε να ελαχιστοποιείται η απόσταση $\|Xa - y\|$, όπου $y = (y_1, \dots, y_m)^t$. Δηλαδή ψάχνουμε να βρούμε την ελάχιστη απόσταση του y από τον χώρο που παράγουν οι στήλες του πίνακα . Με άλλα λόγια το σύστημα είναι αδύνατο δηλαδή το y δεν ανήκει στην εικόνα της γραμμικής συνάρτησης που ορίζει ο πίνακας X, οπότε ψάχνουμε να βρούμε το πλησιέστερο διάνυσμα της εικόνας στο y. Συνεπώς αν $x^1, \dots, x^{n'}$, $n \le n'$ είναι μια βάση του χώρου στηλών του πίνακα X ψάχνουμε για $v = X'a$ στον χώρο στηλών ώστε

$$\langle v - y, x^i\rangle = 0 \text{ για κάθε } i = 1, \dots, n'.$$

Δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$a_1\langle x^1, x^i\rangle + a_2\langle x^2, x^i\rangle + \cdots + a_{n'}\langle x^{n'}, x^i\rangle = \langle y, x^i\rangle \text{ για } i = 1, \ldots, n', \tag{VII.12}$$

με

$$\langle y, x^i\rangle = \sum_{\nu=1}^{m} x_{i\nu} y_\nu \quad \langle x^j, x^i\rangle = \sum_{\nu=1}^{m} x_{j\nu} x_{i,\nu}.$$

αυτό είναι ένα σύστημα n'-εξισώσεων με n'-αγνώστους το οποίο έχει μοναδική λύση αρκεί ο πίνακας

$$A = (a_{ij}) \text{ με } a_{ij} = \langle x^j, x^i\rangle$$

να είναι αντιστρέψιμος. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = (X')^t X'$, όπου X' είναι ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα $x^1, \ldots, x^{n'}$. Στο επόμενο λήμμα θα δείξουμε ότι ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς έχουμε ότι οι λύσεις το συστήματος (VII.12) δίνονται από

$$(a_1, \ldots, a_{n'})^t = ((X')^t X')^{-1}(X')^t (y_1, \ldots, y_m)^t.$$

Λήμμα VII.5.15. *Έστω πίνακας X' πίνακας $m \times n'$ με στήλες τις $x^1, \ldots, x^{n'}$. Το σύνολο στηλών $x^1, \ldots, x^{n'}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν ο πίνακας $(X')^t(X')$ είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο $n' \times n'$ πίνακας $(X')^t X'$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει μη-μηδενικό $v \in \mathbb{R}^{n',1}$ με $(X')^t X' v = \mathbf{0}_{n',1}$ και συνεπώς και το $v^t (X')^t X' v = 0$ άρα $\langle X'v, X'v\rangle = \|X'v\| = 0$ το οποίο μας δίνει ότι $X'v = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$ συνεπώς και ο πίνακας X' έχει μη τετριμμένο πυρήνα, άρα οι στήλες του είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Αντιστρόφως, κάθε σχέση εξάρτησης μεταξύ των στηλών δίνει ένα μη-μηδενικό $w \in \mathbb{R}^n$, ώστε $'w = 0$. Άρα $(X')^t X w = 0$ συνεπώς ο $n' \times n'$ πίνακας $(X')^t X$ δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος. □

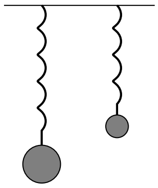
Πόρισμα VII.5.16. *Στην περίπτωση που έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(x) = ax$ και ζητούμε να προσδιορίσουμε το a, δηλαδή θέλουμε να βρούμε την «καλύτερη» ευθεία της μορφής $y = ax$ που να προσεγγίζει τα σημεία $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ τότε θέτουμε $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ και το a δίνεται από το*

$$a = (x^t x)^{-1}(x^t y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Παράδειγμα VII.5.17. Είναι γνωστό ότι η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο όταν τεντωθεί είναι ανάλογη της μετατόπισης, δηλαδή

$$F = -kx$$

για κάποια σταθερά k. Θέλουμε να την μετρήσουμε την σταθερά k για κάποιο συγκεκριμένο ελατήριο. Υποβάλουμε το ελατήριο σε μια σειρά από παραμορφώσεις και μετράμε την δύναμη που ασκεί αυτό και πειραματικά λογαριάζουμε τον πίνακα: Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε τις εξής μετρήσεις:



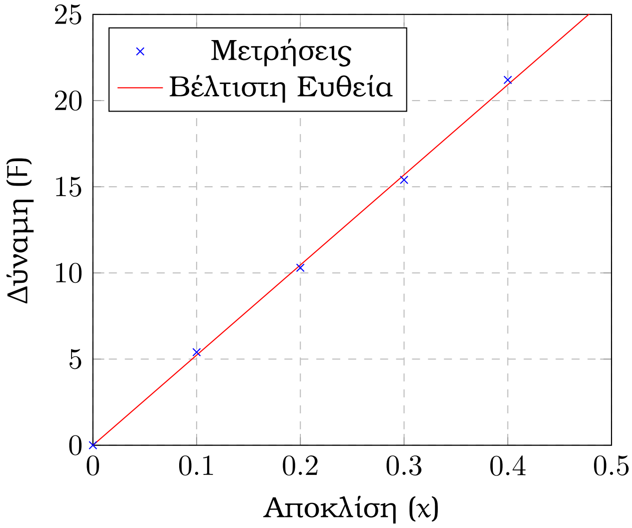
Αποκλίση (x)	Δύναμη (F)
0.0	0.0
0.1	5.2
0.2	10.5
0.3	15.7
0.4	20.9

από όπου υπολογίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 = 0.3$$

$$\sum_{i=1}^{5} F_i x_i = 0.0 + 0.52 + 2.1 + 4.71 + 8.36 = 15.69$$

από όπου έχουμε ότι $k = \frac{15.69}{0.3} \approx 52.3$



Σχήμα VII.6: Μετρήσεις και βέλτιστη ευθεία

Παράδειγμα VII.5.18. Η πλησιέστερη έλλειψη σε μία σειρά σημείων. Αν μας δοθούν μια σειρά σημείων στον επίπεδο μπορούμε να υπολογίσουμε την πλησιέστερη έλλειψη σε αυτά;

Αυτό είναι ένα πρόβλημα το οποίο έλυσε ο Gauss σε ηλικία 24 ετών με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων την οποία είχε επινοήσει ο ίδιος. Οι αστρονόμοι είχαν παρατηρήσει ένα νέο πλανήτη τον αστεροειδή «Δήμητρα» και είχαν δεδομένα για την θέση του μια χρονική στιγμή αλλά δεν ήταν δυνατόν να τον ξανά παρατηρήσουν. Ο Gauss υπολόγισε την τροχιά της Δήμητρας και είπε στους αστρονόμους πότε και που να στρέψουν τα τηλεσκόπια τους ώστε να ξαναδούν τον χαμένο αστεροειδή. Η ανακάλυψη της Δήμητρας ήταν ένας θρίαμβος των Μαθηματικών και του νεαρού τότε Gauss. Ο Gauss έλυσε το πρόβλημα στον χώρο, εμείς για χάρη ευκολίας θα περιοριστούμε σε ένα πρόβλημα στο επίπεδο.

Μια έλλειψη δίνεται ως ένα σύνολο σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής

$$x^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να αντιστοιχεί και σε άλλες κωνικές τομές, κύκλους, παραβολές και υπερβολές. Αν μας δοθούν τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ τότε υπάρχει μια έλλειψη η οποία περνάει από αυτά αν και μόνο αν

$$x_i^2 + By_i^2 + Cx_iy_i + Dx_i + Ey_i + F = 0 \text{ για κάθε } 1 \le i \le n.$$

Μπορεί να υπάρχουν λάθη στις συντεταγμένες των σημείων και να μην ανήκουν όλα σε μια εξίσωση της παραπάνω μορφής. Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την πλησιέστερη κωνική τομή στα δεδομένα σημεία. Το πρόβλημα μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής

$$\begin{pmatrix} y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^2 & x_ny_n & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα τα x_i, y_i είναι γνωστά και ζητούμε να υπολογίσουμε τα B, C, D, E, F. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^2 & x_ny_n & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \text{ και } b = - \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$$

Έστω το σύνολο των σημείων του επιπέδου

$$\{(8,2), (-6.07,-3.18), (-1.53,-6.82), (4.39,-4.74), (5.27,0.66), (3,5), (-5.31,6.38)\}.$$

Υπολογίζουμε τους πίνακες A, b

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -8 & 2 & 1 \\ 10.1124 & 19.3026 & -6.07 & -3.18 & 1 \\ 46.5124 & 10.4346 & -1.53 & -6.82 & 1 \\ 22.4676 & -20.8086 & 4.39 & -4.74 & 1 \\ 0.4356 & 3.4782 & 5.27 & 0.66 & 1 \\ 25 & 15 & 3 & 5 & 1 \\ 40.7044 & -33.8778 & -5.31 & 6.38 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} -64 \\ -36.8449 \\ -2.3409 \\ -19.2721 \\ -27.7729 \\ -9 \\ -28.1961 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε

$$A^tA = \begin{pmatrix} 5068.49 & -853.446 & -204.758 & -62.8869 & 149.232 \\ -853.446 & 2555.27 & 146.74 & -204.758 & -22.471 \\ -204.758 & 146.74 & 187.427 & -22.471 & -8.25 \\ -62.8869 & -204.758 & -22.471 & 149.232 & -0.7 \\ 149.232 & -22.471 & -8.25 & -0.7 & 7. \end{pmatrix}$$

Τέλος έχουμε ότι

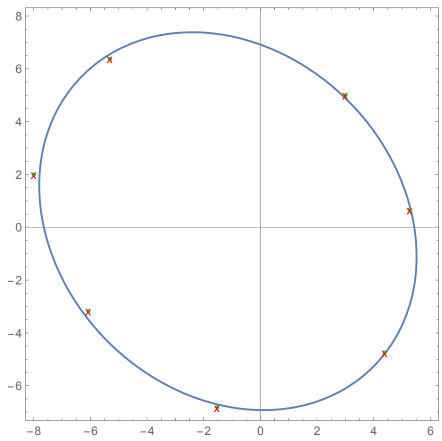
$$\begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^tb = \begin{pmatrix} 0.866743 \\ 0.350403 \\ 2.21155 \\ 0.000974531 \\ -41.5219 \end{pmatrix}$$

όποτε καταλήγουμε στην εξίσωση της έλλειψης:

$$x^2 + 0.866743y^2 + 0.350403xy + 2.21155x + 0.000974531y - 41.5219 = 0.$$

Στο σχήμα VII.7 έχουμε σχεδιάσει την παραπάνω εξίσωση μαζί με τα αρχικά σημεία.

VII.6 Η συζυγής γραμμική συνάρτηση



Σχήμα VII.7: Η βέλτιστη έλλειψη από μία επιλογή σημείων

Ορισμός VII.6.1. Ο δυικός χώρος ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι ο χώρος των γραμμικών συναρτήσεων

$$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F}) := \{f : V \to \mathbb{F}, f \text{ είναι γραμμική}\}.$$

Τα στοιχεία του δυικού χώρου λέγονται και γραμμικά συναρτησοειδή.

Είναι σαφές ότι είναι και αυτός ένας διανυσματικός χώρος με πράξεις

$$\begin{aligned} + : V^* \times V^* &\longrightarrow V^* \\ (f,g) &\longmapsto f+g : v \to (f+g)(v) = f(v)+g(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times V^* &\longrightarrow V^* \\ (\lambda, g) &\longmapsto \lambda g : v \to (\lambda f)(v) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

Παρατήρηση VII.6.2. Κάθε στοιχείο $a \in V$ ορίζει ένα στοιχείο στο V^*, το $v \mapsto \langle v, a\rangle$. Θα δείξουμε ότι σε πεπερασμένης διάστασης χώρους ισχύει και το αντίθετο.

Πρόταση VII.6.3. *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V και $f \in V^*$. Τότε υπάρχει μοναδικό $a \in V$ ώστε*

$$f(v) = \langle v, a\rangle, \text{ για κάθε } v \in V.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του V. Θέτουμε

$$a = \sum_{j=1}^{n} \overline{f(e_j)} e_j,$$

και υπολογίζουμε

$$\langle e_i, a\rangle = \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} \overline{f(e_j)} e_j \right\rangle = f(e_i)$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση VII.6.4. Σε άπειρης διάστασης διανυσματικούς χώρους η παραπάνω πρόταση δεν είναι αληθείς. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}[x]$, με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Όπως είδαμε στην άσκηση VII.2.11 για $f = \sum_\nu a_\nu x^\nu$, $g = \sum_\mu b_\mu x^\mu$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu,\mu} a_\nu \overline{b_\mu}\frac{1}{\nu+\mu+1}.$$

Για ένα σταθερό $z \in \mathbb{C}$ Θεωρούμε το στοιχείο του V^*

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ f &\longmapsto \mathrm{eval}(f) = f(z).\end{aligned}$$

Αυτή είναι μια γραμμική συνάρτηση δηλαδή

$$\mathrm{eval}(f+g) = (f+g)(z) = f(z)+g(z) = \mathrm{eval}(f)+\mathrm{eval}(g) \text{ για κάθε } f, g \in \mathbb{C}[x]$$

και

$$\mathrm{eval}(\lambda f) = \lambda f(z) = \lambda \mathrm{eval}(f) \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathbb{C}[x].$$

Υπάρχει πολυώνυμο $g \in \mathbb{C}[x]$ ώστε

$$\mathrm{eval}(f) = \langle f, g\rangle \text{ για κάθε } f \in \mathbb{C}[x];$$

Η απάντηση είναι όχι. Πράγματι, υποθέτουμε ότι το $f(x) = (x-z)f_1(x)$. Τότε έχουμε

$$0 = f(z) = \mathrm{eval}(f) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 (x-z)f_1(t)\overline{g(t)}dt,$$

και η τελευταία σχέση είναι αληθής για κάθε $f_1(x)$ άρα και για $f_1(x) = \overline{x-z}\,\overline{g(x)}$, το οποίο δίνει ότι

$$0 = \int_0^1 |t-z|^2|g(t)|^2dt$$

το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο αν $g = 0$. Όμως το eval δεν είναι το μηδενικό συναρτησοειδές, άτοπο.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, δεν είναι δυνατόν ένα πολυώνυμο g, το οποίο έχει πεπερασμένη πληροφορία διάστασης $\deg g + 1$ να περιγράψει μια γραμμική συνάρτηση που έχει πληροφορία στο πως δρα σε ένα άπειρης διάστασης χώρο. Στο μάθημα της συναρτησιακής ανάλυσης θα δείτε ότι με επιπλέον συνθήκες, για παράδειγμα την πληρότητα της μετρικής, δηλαδή εξασφαλίζοντας ότι κάθε ακολουθία Cauchy ως προς την μετρική $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$ συγκλίνει, έχουμε ένα θεώρημα αναπαράστασης των "συνεχών" συναρτησοειδών f στην μορφή $f(\cdot) = \langle \cdot, v\rangle$ και για απειροδιάστατους χώρους[1].

Παρατήρηση VII.6.5. Έστω $f : V \to \mathbb{F}$ ένα στοιχείο του δυικού χώρου. Θέτουμε $W = \ker(f)$. Αν το $f \neq 0$, τότε $\mathrm{rk}(f) = 1$ και $\dim W = \dim V - 1$. Θεωρούμε την ανάλυση $V = W \oplus W^\perp$. Η τιμή του f προσδιορίζεται από την τιμή στο $W^\perp$. Αν $p_{W^\perp} : V \to W^\perp$ είναι η ορθογώνια προβολή, τότε $f(v) = f(p_{W^\perp}(v))$ για κάθε $v \in V$. Αν $f \neq 0$, και w ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $W^\perp$, τότε

$$p_{W^\perp}(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}w \text{ για κάθε } v \in V.$$

Συνεπώς,

$$f(v) = \langle v, w\rangle\frac{f(w)}{\|w\|^2} = \left\langle v, \overline{\frac{f(w)}{\|w\|^2}}w\right\rangle \text{ για κάθε } v \in W.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Riesz_representation_theorem

Λήμμα VII.6.6. *Αν για κάθε $v \in V$ ισχύει*

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$$

τότε $w_1 = w_2$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι για κάθε $v \in V$ $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$, οπότε αρκεί να πάρουμε $v = w_1 - w_2$. □

Θεώρημα VII.6.7. *Έστω V πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε γραμμική συνάρτηση $T : V \to V$, υπάρχει μοναδική γραμμική συνάρτηση T^* ώστε*

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle \text{ για κάθε } v, w \in V.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $w \in V$. Τότε η συνάρτηση

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ v &\longmapsto \langle Tv, w \rangle \end{aligned}$$

είναι ένα στοιχείο του δυικού χώρου και συνεπώς υπάρχει μοναδικό $w' \in V$, το οποίο θα το συμβολίζουμε με $T^* w$, ώστε

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle.$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι το $T^* w$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του w. Πράγματι, για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ και $w_1, w_2 \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \rangle &= \langle Tv, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle Tv, w_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle Tv, w_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle v, T^* w_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v, T^* w_2 \rangle \\ &= \langle v, \lambda_1 T^*(w_1) + \lambda_2 T^*(w_2) \rangle, \end{aligned}$$

από όπου έχουμε, σύμφωνα με το λήμμα VII.6.6, ότι

$$T^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 T^*(w_1) + \lambda_2 T^*(w_2).$$

□

Θεώρημα VII.6.8. *Σε ένα πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο V θεωρούμε τον χώρο*

$$\mathrm{End}(V) = \{T : V \to V : T \text{ γραμμική}\}.$$

Η συνάρτηση $T \mapsto T^*$ είναι μια συνάρτηση $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ η οποία ικανοποιεί

1. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$, *για κάθε* $T_1, T_2 \in \mathrm{End}(V)$
2. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$, *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{C}$ *και κάθε* $T \in \mathrm{End}(V)$
3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ *για κάθε* $T_1, T_2 \in \mathrm{End}(V)$
4. $(T^*)^* = T$ *για κάθε* $T \in \mathrm{End}(V)$

Απόδειξη. Για το 1. παρατηρούμε ότι για κάθε $v, w \in V$ έχουμε

$$\langle v, (T_1 + T_2)^* w\rangle = \langle (T_1 + T_2)v, w\rangle = \langle T_1 v, w\rangle + \langle T_2 v, w\rangle = \langle v, T_1^* w\rangle + \langle v, T_2^* w\rangle = \langle v, (T_1^* + T_2^*)w\rangle$$

οπότε η ισότητα προκύπτει λόγω του μονοσημάντου του $(T_1 + T_2)^*$.

Το 2. προκύπτει με παρόμοιο τρόπο

$$\langle v, (\lambda T)^* w\rangle = \langle \lambda T v, w\rangle = \lambda\langle Tv, w\rangle = \lambda\langle v, T^* w\rangle = \langle v, \overline{\lambda} T^* w\rangle.$$

Για το 3. έχουμε

$$\langle v, (T_1 T_2)^* w\rangle = \langle T_1 T_2 v, w\rangle = \langle T_2 v, T_1^* w\rangle = \langle v, T_2^* T_1^* w\rangle.$$

Για το 4. υπολογίζουμε

$$\langle v, (T^*)^* w\rangle = \langle T^* v, w\rangle = \overline{\langle w, T^* v\rangle} = \overline{\langle Tw, v\rangle} = \langle v, Tw\rangle.$$

□

Πρόταση VII.6.9. *Σε ένα πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο και $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ μια διατεταγμένη ορθοκανονική βάση, αν $(T, B, B) = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας μιας γραμμικής συνάρτησης $T : V \to V$, έχουμε ότι $a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$.*

Απόδειξη. Εκφράζουμε κάθε $v \in V$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Ο πίνακας του T υπολογίζεται από την σχέση

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

άρα

$$\langle Te_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a_{ij} e_j, e_i\rangle = a_{ij}.$$

□

Πόρισμα VII.6.10. *Σε κάθε ορθοκανονική βάση B του πεπερασμένης διάστασης χώρου V, και κάθε γραμμική $T : V \to V$ ισχύει ότι*

$$(T^*, B, B) = (T, B, B)^*,$$

όπου για ένα πίνακα A θέτουμε $A^* = \overline{A}^t$, δηλαδή τον ανάστροφο στον οποίο έχουμε εφαρμόσει την μιγαδική συζυγία σε κάθε στοιχείο του.

Απόδειξη. Έστω $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του V και $A = (a_{ij}) = (T, B, B)$, $B = (b_{ij}) = (T^*, B, B)$. Έχουμε ότι

$$a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle, \qquad b_{ij} = \langle T^* e_j, e_i\rangle.$$

Συνεπώς

$$b_{ij} = \langle T^* e_j, e_i\rangle = \langle e_j, Te_i\rangle = \overline{\langle Te_i, e_j\rangle} = \overline{a_{ji}},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα VII.6.11. Αν θεωρήσουμε τον χώρο $\mathbb{C}^n$ των διανυσμάτων στηλών, τότε η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto y^* x = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

ορίζει το ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο. Μια γραμμική συνάρτηση δίνεται μέσω ενός $n \times n$ πίνακα A, δηλαδή $x \mapsto Ax$. Έχουμε ότι

$$\langle Ax, y \rangle = y^* Ax = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle.$$

Άσκηση VII.6.12. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^{n,n}$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^* A).$$

Για ένα σταθερό πίνακα M θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση

$$\begin{aligned} L_M : \mathbb{C}^{n,n} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n,n} \\ A &\longmapsto MA \end{aligned}$$

Δείξτε ότι $L_M^* = L_{M^*}$.

Λύση VII.6.13. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle L_M(A), B \rangle &= \mathrm{tr} B^* MA) = \mathrm{tr} MAB^* = \mathrm{tr}(AB^* M) \\ &= \mathrm{tr}(A(M^* B)^*) = \mathrm{tr}(M^* B)^* A = \langle A, M^* B \rangle = \langle A, L_{M^*} B \rangle. \end{aligned}$$

Άσκηση VII.6.14. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}[x]$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt.$$

- Δείξτε ότι για σταθερό $f \in \mathbb{C}[x]$ για την γραμμική συνάρτηση

$$\begin{aligned} M_f : \mathbb{C}[x] &\longrightarrow \mathbb{C}[x] \\ g &\longmapsto fg \end{aligned}$$

  ισχύει ότι $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

- Για την γραμμική συνάρτηση

$$\begin{aligned} D : \mathbb{C}[x] &\longrightarrow \mathbb{C}[x] \\ g &\longmapsto Dg = g' \end{aligned}$$

  δεν υπάρχει γραμμική συνάρτηση D^*, ώστε $\langle Df, g \rangle = \langle f, D^* g \rangle$ για κάθε $f, g \in \mathbb{C}[x]$.

Λύση VII.6.15. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle M_f g, h \rangle = \langle fg, h \rangle &= \int_0^1 f(t) g(t) \overline{h(t)} dt \\ &= \int_0^1 g(t) \overline{\overline{f(t)} h(t)} dt = \langle g, \overline{f} h \rangle = \langle g, M_{\overline{f}}(h) \rangle. \end{aligned}$$

Για την συνάρτηση παραγώγισης D παρατηρούμε ότι

$$\langle Df, g \rangle = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \langle f, Dg \rangle.$$

Για g σταθερό υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο D^* ώστε $\langle Df, g \rangle = \langle f, D^* g \rangle$. Τότε

$$\langle f, D^* g \rangle = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \langle f, Dg \rangle$$

ισοδύναμα

$$\langle f, D^* g + Dg \rangle = f(1)g(1) - f(0)g(0).$$

Παρατηρούμε ότι για g σταθερό το $L(f) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ είναι ένα στοιχείο του δυικού χώρου όπως στην παρατήρηση VII.6.4 και δεν υπάρχει $h \in \mathbb{C}[x]$ ώστε $L(f) = \langle f, h \rangle$ εκτός αν $L = 0$. Συνεπώς η ύπαρξη του $D^* g$ μας δίνει ότι το $h = D^* g + Dg$ πρέπει να είναι μηδενικό και $g(0) = g(1) = 0$. Αν διαλέξουμε g ώστε $g(0) \neq 0$ ή $g(1) \neq 0$ το $D^* g$ δεν ορίζεται και δεν υπάρχει συζυγής.

VII.7 Μοναδιαίες γραμμικές συναρτήσεις

Ορισμός VII.7.1. Θα λέμε ότι μία γραμμική συνάρτηση $: V \to W$ ανάμεσα σε διανυσματικούς χώρους V, W διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο όταν

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle, \text{ για κάθε } v \in V.$$

Ένας ισομορφισμός ανάμεσα σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο θα είναι ένας ισομορφισμός που επιπλέον διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Παρατήρηση VII.7.2. Μια γραμμική συνάρτηση $V \to W$ που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο δεν μπορεί να έχει μη τετριμμένο πυρήνα, αφού $\|Tv\| = \|v\|$ και αν $v \in \ker$ τότε $v = \mathbf{0}$.

Συνεπώς αν $\dim V = \dim W$ κάθε γραμμική συνάρτηση $V \to W$ που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση VII.7.3. Κάθε γραμμική συνάρτηση $T : V \to W$ που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο μεταφέρει ορθοκανονικές βάσεις σε ορθοκανονικές βάσεις. Αντιστρόφως αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V, ώστε $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$ να είναι μια ορθοκανονική βάση του W, τότε για κάθε $v, w \in V$, έχουμε

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$$

και

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu}_j.$$

Ομοίως

$$\langle Tv, Tw \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu}_j \langle Te_i, Te_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu}_j,$$

δηλαδή

$$\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle.$$

Ορισμός VII.7.4. Μία μοναδιαία (unitary) γραμμική συνάρτηση είναι ένας ισομορφισμός που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Παρατήρηση VII.7.5. Η σύνθεση δύο μοναδιαίων γραμμικών συναρτήσεων είναι μοναδιαία γραμμική συνάρτηση, η ταυτοτική συνάρτηση είναι μοναδιαία γραμμική συνάρτηση. Συνεπώς οι μοναδιαίες γραμμικές συναρτήσεις αποτελούν υποομάδα της ομάδας των αντιστρέψιμων γραμμικών συναρτήσεων.

Πρόταση VII.7.6. *Μία γραμμική συνάρτηση είναι μοναδιαία αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμη και* $U^{-1} = U^*$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι U είναι μοναδιαία, δηλαδή διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι για κάθε $v, w \in W$ και $U : V \to U$ μοναδιαία έχουμε

$$\langle Uv, w \rangle = \langle Uv, \mathrm{Id}_V w \rangle \overset{\mathrm{Id}_V = UU^{-1}}{=} \langle Uv, UU^{-1} w \rangle = \langle v, U^{-1} w \rangle$$

από όπου προκύπτει ότι $U^{-1} = U^*$.

Αντιστρόφως, αν $U^{-1} = U^*$, τότε

$$\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, U^*Uw\rangle = \langle v, w\rangle \text{ για κάθε } v, w \in V.$$

□

Ορισμός VII.7.7. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ θα λέγεται μοναδιαίος (unitary) αν και μόνο αν για $A^* = \overline{A}^t$ ισχύει $AA^* = \mathbb{I}_n$.

Πρόταση VII.7.8. *Σε ένα διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης η γραμμική συνάρτηση $T : V \to V$ είναι μοναδιαία αν και μόνο αν ο πίνακας της ως προς μια ορθοκανονική βάση είναι είναι μοναδιαίος.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $A = (T, B, B)$ είναι ο πίνακας της T ως προς μια ορθοκανονική βάση B τότε ο πίνακας (T^*, B, B) της T^* είναι ο $A^* = \overline{A}^t$. □

Ορισμός VII.7.9. Ένας πραγματικός ή μιγαδικός πίνακας θα λέγεται ορθογώνιος αν $AA^t = \mathbb{I}_n$.

Παρατήρηση VII.7.10. Ένας πραγματικός πίνακας είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν είναι μοναδιαίος.

Πρόταση VII.7.11. *Ένας πίνακας είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν οι γραμμές ή οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$ με το ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = y^*x$.*

Απόδειξη. Γράφουμε τον πίνακα $A = (a^1, \ldots, a^n)$, όπου a^i είναι η i-στήλη Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A^* = (c_{ij})$ έχει

$$c_{ij} = (a^i)^*a^j = \langle a^j, a^i\rangle.$$

Η συνθήκη $^* = \mathbb{I}_n$ είναι ισοδύναμη με το ότι $c_{ij} = \delta_{ij} = \langle a^j, a^i\rangle$ δηλαδή οι στήλες αποτελούν μια ορθοκανονική βάση.

Για να δείξουμε ότι και οι στήλες αποτελούν μια ορθοκανονική βάση παρατηρούμε ότι

$$A^*A = \mathbb{I}_n \Leftrightarrow (A^t)(A^t)^* = \mathbb{I}_n,$$

δηλαδή ο A είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν ο A^t είναι μοναδιαίος. □

Η μέθοδος Gram-Schmidt έχει την παρακάτω ενδιαφέρουσα συνέπεια:

Πρόταση VII.7.12. *Για κάθε αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα A υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας B με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο ώστε BA να είναι μοναδιαίος.*

Απόδειξη. Οι γραμμές $a_1, \dots, a_n$ του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Εκτελούμε την μέθοδο Gram-Schmidt στις γραμμές $a_1, \dots, a_n$ και καταλήγουμε σε μία ορθογώνια βάση $u_1, \dots, u_n$ του $\mathbb{C}^n$. Κατά την διαδικασία παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα της αναδρομικής ορθοκανονικοποίησης τα $\{u_1, \dots, u_i\}$ αποτελούν μια ορθογώνια βάση του διανυσματικού χώρου $\langle a_1, \dots, a_i \rangle$ και ότι

$$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle a_k, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

Δηλαδή, υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές γ_{kj} ώστε

$$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{kj} a_j.$$

Θεωρούμε τον unitary πίνακα U με γραμμές $u_1/\|u_1\|, \dots, u_n/\|u_n\|$ και B τον πίνακα που ορίζεται από

$$b_{kj} = \begin{cases} -\frac{\gamma_{kj}}{\|u_k\|} & \text{αν } j < k \\ \frac{1}{\|u_k\|} & \text{αν } j = k \\ 0 & \text{αν } j > k \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ο B είναι κάτω τριγωνικός, έχει θετικές τιμές στην διαγώνιο και επίσης

$$\frac{u_k}{\|u_k\|} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_j, \text{ για κάθε } 1 \le k \le n,$$

δηλαδή $U = BA$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η γραφή είναι μοναδική. Θεωρούμε το σύνολο $T^+(n)$ των $n \times n$ κάτω τριγωνικών πινάκων με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο και με $U(n)$ το σύνολο των μοναδιαίων $n \times n$ πινάκων.

Υποθέτουμε ότι $B_1, B_2 \in T^+(n)$, ώστε $B_1 A, B_2 A \in U(n)$. Έχουμε ότι ο αντίστροφος κάθε μοναδιαίου πίνακα είναι μοναδιαίος και ότι το γινόμενο δύο μοναδιαίων πινάκων είναι μοναδιαίος. Συνεπώς,

$$(B_A)(B_2 A)^{-1} = B_1 B_2^{-1} \in U(n).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος κάθε πίνακα στο $T^+(n)$ ανήκει στο $T^+(n)$ όπως και το γινόμενο δύο πινάκων στο $T^+(n)$ ανήκει στο $T^+(n)$, δείτε την άσκηση VII.7.14.

Αφού $B_1 B_2^{-1} \in U(n)$, έχουμε ότι $(B_1 B_2^{-1})^{-1} = (B_1 B_2^{-1})^*$. Δηλαδή ο πίνακας $({}_1{}_2^{-1})^{-1}$ είναι κάτω τριγωνικός, ως αντίστροφος στοιχείου στο $T^+(n)$ αλλά και άνω τριγωνικός ως ανάστροφος κάτω τριγωνικού. Άρα είναι διαγώνιος. Και αφού είναι μοναδιαίος τα στοιχεία της διαγωνίου του έχουν μέτρο 1 και είναι και ταυτόχρονα θετικά. Άρα $B_1 B_2^{-1} = \mathbb{I}_n$. □

Παράδειγμα VII.7.13. Να βρεθεί κάτω τριγωνικός πίνακας B με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο για τον πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ώστε ο πίνακας BA να είναι μοναδιαίος.

Στο παράδειγμα VII.5.4 κάναμε μια ορθοκανονικοποίηση των γραμμών του πίνακα υπολογίζοντας ότι

$$\begin{aligned} u_1 = v_1, u_2 = v_2 - \frac{2}{7}v_1, u_3 &= v_3 - \frac{1}{2}v_1 + \frac{21}{27}u_2 \\ &= v_3 - \frac{1}{2}v_1 + \frac{21}{27}(v_2 - \frac{2}{7}v_1) \\ &= v_3 + \frac{21}{27}v_2 - \frac{13}{18}v_1 \end{aligned}$$

οπότε έχουμε τον πίνακα

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{13}{18} & \frac{7}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

ώστε

$$B'A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{12}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας δεν είναι μοναδιαίος γιατί οι γραμμές είναι ορθογώνιες αλλά δεν έχουν μέτρο 1. Αντικαθιστώντας τον πίνακα B' με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{27}} & \sqrt{7/27} & 0 \\ \frac{13}{18}\sqrt{6} & \frac{7}{9}\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

έχουμε την ζητούμενη ανάλυση.

Άσκηση VII.7.14. Έστω $T^+(n)$ το σύνολο των $n \times n$ κάτω τριγωνικών πινάκων με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο. Δείξτε ότι για κάθε $B_1, B_2 \in T^+(n)$ το γινόμενο $B_1B_2 \in T^+(n)$ και ότι για κάθε $B \in T^+(n)$ ισχύει ότι $B^{-1} \in T^+(n)$.

Λύση VII.7.15. Είναι σαφές ότι το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας αλλά και ότι το γινόμενο δύο πινάκων που ο καθένας έχει θετικά στοιχεία στην διαγώνιο θα έχει και αυτό θετικά στοιχεία στην διαγώνιο.

Θεωρούμε ένα κάτω τριγωνικό αντιστρέψιμο πίνακα B τον οποίο τον γράφουμε στην μορφή

$$B = \Delta(\mathbb{I}_n + L)$$

όπου ο Δ είναι διαγώνιος πίνακας με μή-μηδενικά στοιχεία ενώ ο L είναι κάτω τριγωνικός με μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο. Ισχύει ότι $L^n = 0$ (το οποίο το βλέπουμε είτε από την διαγώνια μορφή του πίνακα είτε εξυπνότερα από το Θεώρημα Caley-Hamilton). Τώρα υπολογίζουμε ότι

$$(\mathbb{I}_n + L)(\mathbb{I}_n - L + L^2 - L^3 + \cdots + (-1)^{n-1}L^{n-1}) = \mathbb{I}_n.$$

Άρα

$$B^{-1} = (\mathbb{I}_n + L)^{-1}\Delta^{-1} = (\mathbb{I}_n - L + L^2 - L^3 + \cdots + (-1)^{n-1}L^{n-1})\Delta^{-1}$$

ο οποίος είναι κάτω τριγωνικός, ως άθροισμα γινομένων κάτω τριγωνικών πινάκων. Η απαίτηση για θετικά στοιχεία στην διαγώνιο είναι εμφανής από τον υπολογισμό αντιστρόφου διαγώνιου πίνακα.

Άσκηση VII.7.16. Θεωρούμε τον χώρο $V = C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων $[0,1] \to \mathbb{R}$, με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

και W τον ίδιο χώρο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Αφού δείξετε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ είναι εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι η

$$\begin{aligned} T : W &\longrightarrow V \\ f(x) &\longmapsto xf(x) \end{aligned}$$

διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

Λύση VII.7.17. Το ότι το $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ είναι εσωτερικό γινόμενο είναι μια εύκολη επαλήθευση.

Παρατηρούμε ότι
$$\langle f, g\rangle_2 = \int_0^1 f(t)g(t)t^2dt = \langle Tf, Tg\rangle_1.$$
Η συνάρτηση $:W \to V$ είναι 1-1 αλλά επειδή η διάστασεις των V, W δεν είναι πεπερασμένες δεν είναι επί. Πράγματι δεν υπάρχει τρόπος να πάρουμε την σταθερή συνάρτηση $1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ως γινόμενο $xg(x) = 1$, η συνάρτηση $g(x) = 1/x$ δεν ορίζεται στο 0.

Άσκηση VII.7.18. Να βρεθούν όλοι οι $n \times n$ μοναδιαίοι και ορθογώνιοι πίνακες για $n = 1, 2$.

Λύση VII.7.19. Ένας 1×1 πίνακας (a) είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν $a^2 = 1$ δηλαδή αν και μόνο αν $a = \pm 1$. Ένας 1×1 πίνακας (a) είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν $a\overline{a} = \|a\|^2 = 1$ δηλαδή το a είναι ένας μιγαδικός πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, $a = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα ένας 2×2 πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ με } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
Αν ο πίνακας είναι ορθογώνιος, δηλαδή αν $AA^t = \mathbb{I}_n$, τότε $\det(A) = \pm 1$, αφού $\det A^t = \det A$. Συνεπώς ο πίνακας είναι ορθογώνιος αν
$$\det A = -1 \text{ και } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$
$$\det A = 1 \text{ και } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
και στις δύο περιπτώσεις ο υπολογισμός της ορίζουσας δίνει την σχέση $a^2 + b^2 = 1$.

Στην περίπτωση ενός πραγματικού πίνακα έχουμε ότι αυτός είναι ένας πίνακας της μορφής
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Στην μιγαδική περίπτωση τώρα, παρατηρούμε ότι για μοναδιαίους πίνακες η σχέση $AA^* = I_2$, δίνει ότι $\det A\overline{\det A} = 1$ συνεπώς η ορίζουσα έχει μέτρο 1, δηλαδή $\det A = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Επιπλέον ο πίνακας είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν
$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow = \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\overline{b} & e^{i\theta}\overline{a} \end{pmatrix}$$
και $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

VII.8 Κανονικές γραμμικές συναρτήσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα απαντήσουμε στο πότε μια γραμμική συνάρτηση $L : V \to V$, όπου ο V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος έχει μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα. Ας υποθέσουμε ότι $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι μια τέτοια βάση. Από την μία έχουμε ότι
$$Le_j = \lambda_j e_j$$
δηλαδή ο (L, B, B) είναι ένας διαγώνιος πίνακας, συνεπώς ο $(L^*, B, B) = (L, B, B)^*$ δηλαδή είναι και αυτός διαγωνοποιήσιμος ως προς την ίδια βάση. Αυτό σημαίνει ότι $L^*L = LL^*$, δείτε και την πρόταση VI.3.9.

Ορισμός VII.8.1. Έστω $L : V \to V$ γραμμική συνάρτηση, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος. Η L θα λέγεται κανονική (normal) αν και μόνο αν $L^*L = LL^*$.

Ορισμός VII.8.2. Έστω $L : V \to V$ γραμμική συνάρτηση, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος. Η L θα λέγεται αυτοσυζυγής ή ερμητιανή αν και μόνο αν $L^* = L$.

Παρατήρηση VII.8.3. Είναι σαφές ότι μια ερμητιανή γραμμική συνάρτηση όπως και μια μοναδιαία γραμμική συνάρτηση είναι κανονική.

Πρόταση VII.8.4. *Οι ιδιοτιμές μιας ερμητιανής γραμμικής συνάρτησης είναι όλες πραγματικές. Επίσης τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα της $L \to L$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Έχουμε ότι

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Lv, v\rangle = \langle v, L^*v\rangle = \langle v, Lv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

και αφού $\langle v, v\rangle \neq 0$ έχουμε ότι $\lambda = \overline{\lambda}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$.

Από την άλλη αν $Lv = \lambda v$ και $Lw = \mu w$ με $\mu \neq \lambda$ τότε

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, L^*w\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \overline{\mu}\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle,$$

συνεπώς $\langle v, w\rangle = 0$. □

Λήμμα VII.8.5. *Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και $L : V \to V$ γραμμική συνάρτηση. Θεωρούμε ένα L-αναλλοίωτο υπόχωρο W. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W^\perp$ είναι L^* αναλλοίωτο.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $Lw \in W$ για κάθε $w \in W$. Έστω $w' \in W^\perp$ δηλαδή $\langle w, w'\rangle = 0$ για κάθε $w \in W$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $L^*w' \in W^\perp$ δηλαδή $\langle w, L^*w'\rangle = 0$ για κάθε $w \in W$. Όμως $\langle w, L^*w'\rangle = \langle Lw, w'\rangle = 0$ αφού $Lw \in W$. □

Θεώρημα VII.8.6. *Για κάθε αυτοσυζυγή γραμμική συνάρτηση $L : V \to V$, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος υπάρχει ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\dim V \geq 1$. Πάνω από το $\mathbb{C}$, έχουμε ότι ο L έχει μια ιδιοτιμή λ η οποία είναι μάλιστα πραγματική. Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v μπορούμε να το κανονικοποιήσουμε στο $e = v/\|v\|$ ώστε να έχει μέτρο 1. Επιπλέον αν δουλεύουμε σε πραγματικούς χώρους μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάνυσμα v έχει πραγματικούς συντελεστές σε οποιαδήποτε βάση, διότι αν $A = (L, B, B) \in \mathbb{R}^{n,n}$ το ιδιοδιάνυσμα έχει συντεταγμένες $[v]_B \in \mathbb{R}^n$ που είναι λύση του συστήματος $(A - \lambda\mathbb{I}_n)x = \mathbf{0}$, το οποίο έχει μη τετριμμένες λύσεις από την επιλογή του λ ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Είναι προφανές ότι αν $\dim V = 1$ υπάρχει ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα το $e = v/\|v\|$ που μόλις κατασκευάσαμε. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για όλες τις αυτοσυζυγείς γραμμικές συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους διάστασης $n-1$. Έστω ότι έχουμε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n. Θεωρούμε την ανάλυση

$$V = \langle e \rangle \bigoplus \langle e \rangle^{\perp}$$

Από το λήμμα Είναι σαφές από το λήμμα VII.8.5 ότι ο

$$L_{\langle e \rangle^{\perp}} = L^*|_{\langle e \rangle^{\perp}} : \langle e \rangle^{\perp} \longrightarrow \langle e \rangle^{\perp}$$

περιορίζεται στον $\langle e \rangle^{\perp}$ σε μια αυτοσυζυγή συνάρτηση η οποία λόγω της επαγωγικής υπόθεσης έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_2, ..., e_n\}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα. Η $\{e, e_2, \dots, e_n\}$ είναι η ζητούμενη ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα για όλο τον χώρο. □

Λήμμα VII.8.7. *Για μία κανονική γραμμική συνάρτηση* $L : V \to V$ *για* $v \in V$ *έχουμε* $\|Lv\| = \|L^*v\|$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\|Lv\|^2 = \langle Lv, Lv \rangle = \langle v, L^*Lv \rangle = \langle v, LL^*v \rangle = \langle L^*v, L^*v \rangle = \|L^*v\|^2.$$

□

Πρόταση VII.8.8. *Έστω* V *πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και* $L : V \to V$ *κανονική γραμμική συνάρτηση. Τότε το* $v \in V$ *είναι ιδιοδιάνυσμα για την* L *με ιδιοτιμή* λ *αν και μόνο αν* v *είναι ιδιοδιάνυσμα για την* T^* *με ιδιοτιμή* $\overline{\lambda}$.

Απόδειξη. Για μια τιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι η συνάρτηση $T = L - \lambda \mathrm{Id}_V$ είναι κανονική αφού $T^* = L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}_V$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} TT^* &= (L - \lambda\mathrm{Id}_V)(L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}_V) = LL^* - \overline{\lambda}L - \lambda L^* - \lambda\overline{\lambda}\mathrm{Id}_V \\ &= L^*L - \overline{\lambda}L - \lambda L^* - \lambda\overline{\lambda}\mathrm{Id}_V = (L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}_V)(L - \lambda\mathrm{Id}_V) = T^*T. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|(L - \lambda\mathrm{Id}_V)v\| = \|(L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}_V)v)\|$$

από όπου προκύπτει ότι $(L-\lambda\mathrm{Id}_V)v = 0$ αν και μόνο αν $(L^*-\overline{\lambda}\mathrm{Id}_V)v = 0$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Ορισμός VII.8.9. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ θα λέγεται κανονικός αν και μόνο αν $AA^* = A^*A$.

Πρόταση VII.8.10. *Σε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο* V*, θεωρούμε μια γραμμική συνάρτηση* $L : V \to V$ *ώστε ο πίνακας της* (L, B, B) *ως προς μία ορθοκανονική βάση* B *να είναι άνω τριγωνικός. Η* L *είναι κανονική αν και μόνο αν* (L, B, B) *είναι διαγώνιος πίνακας.*

Απόδειξη. Έστω $A = (L, B, B)$. Γνωρίζουμε ότι $A^* = (L^*, B, B)$. Αν $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ τότε $A^* = \mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n)$. Είναι σαφές ότι $A^*A = AA^*$ δηλαδή ότι ο A και συνεπώς και η L είναι κανονικοί.

Αντιστρόφως, έστω ότι L είναι κανονική και έστω $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Έχουμε ότι e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα αφού ο A είναι άνω τριγωνικός και μάλιστα $Le_1 = a_{11}e_1$. Από την πρόταση VII.8.8 έχουμε ότι $L^*e_1 = \overline{a}_{11}e_1$. Σύμφωνα με τον ορισμό όμως της $A^* = \overline{A}^t$ αυτό σημαίνει ότι $a_{1j} = 0$ για $j > 1$. Συνεπώς $Le_2 = a_{22}e_2$, άρα και το e_2 είναι ιδιοδιάνυσμα της L. Όπως και πριν έχουμε ότι $L^*e_2 = \overline{a}_{22}e_2$, και αυτό μας δίνει όπως και πριν ότι $a_{2j} = 0$ για $j > 2$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για να δείξουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγώνιος. □

Πρόταση VII.8.11. *Σε ένα πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο* V *και* $L : V \to V$ *υπάρχει μια ορθοκανονική βάση* B*, ώστε ο πίνακας* (L, B, B) *να είναι άνω τριγωνικός.*

Απόδειξη. Αν $\dim V = 1$ τότε το αποτέλεσμα είναι σαφές. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στην διάσταση του V. Υποθέτουμε ότι η πρόταση αληθεύει για κάθε γραμμική συνάρτηση από ένα διανυσματικό χώρο διάστασης $n-1$ στον εαυτό του. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V διάστασης n. Θεωρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα v της L^* το οποίο το κανονικοποιούμε στο $v/\|v\|$ ώστε να έχει μέτρο 1. Ο χώρος $\langle v/\|v\|\rangle$ είναι L^*-αναλλοίωτος συνεπώς ο $\langle v/\|v\|\rangle^{\perp}$ είναι L-αναλλοίωτος και έχει διάσταση $n-1$, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση και να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ στην οποία ο L να είναι άνω τριγωνικός. Η ζητούμενη βάση είναι η $B = \{e_1, \dots, e_{n-1}, v/\|v\|\}$. □

Πόρισμα VII.8.12. *Για κάθε πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ *υπάρχει μοναδιαίος πίνακας* U*, ώστε* UAU^{-1} *να είναι άνω τριγωνικός.*

Τέλος ο συνδυασμός των προτάσεων VII.8.10 και VII.8.11 δίνει το

Θεώρημα VII.8.13. *Έστω ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και* $L : V \to V$ *μια κανονική γραμμική συνάρτηση. Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του* V *η οποία να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.*

Πόρισμα VII.8.14. *Για κάθε κανονικό πίνακα* A *υπάρχει μοναδιαίος πίνακας* U *ώστε* $U^{-1}AU$ *να είναι διαγώνιος πίνακας.*

Για να υπολογίσουμε ένα μοναδιαίο πίνακα U για ένα ερμητιανό πίνακα A, ώστε ο UAU^{-1} να είναι διαγώνιος παρατηρούμε ότι οι ιδιόχωροι που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ανά δύο κάθετοι μεταξύ τους.

Μέθοδος 5 (Διαγωνοποίηση Ερμητιανών Πινάκων)**.**

1. *Υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου*
2. *Εύρεση ιδιοτιμών* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
3. *Υπολογισμός βάσεων* B_i *των ιδιοχώρων* E_{λ_i}.
4. *Ορθοκανονικοποίηση κατά Gram-Schmidt κάθε ιδιόχωρου.*

Παράδειγμα VII.8.15. Θεωρούμε τον ερμητιανό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και θέλουμε να βρούμε μοναδιαίο πίνακα P, ώστε ο P^*AP να είναι διαγώνιος πίνακας.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του είναι το $\mathrm{Ch}_A[x] = (1+x)^2(-5+x)$, το οποίο μπορούμε να το υπολογίσουμε είτε με τον ορισμό είτε ως ειδική περίπτωση της άσκησης VI.1.30. Υπολογίζουμε ότι ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda = 5$ είναι το διάνυσμα $v_1 = (1,1,1)^t$ ενώ ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda = -1$ παράγεται από τα διανύσματα $v_2 = (1,-1,0)^t, v_3 = (1,0,-1)^t$. Θα μπορούσαμε να πάρουμε

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ με αντίστροφο } Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

και να είχαμε ότι $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(5,-1,-1)$. Όμως ο πίνακας Q δεν είναι μοναδιαίος. Για να κατασκευάσουμε τον μοναδιαίο πίνακα P ορθοκανονικοποιούμε σε $e_1 = v_1/\|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$, $e_2 = v_2/\|v_2\| = 1/\sqrt{2}(1,-1,0)$, ενώ $e_3 = u_3/\|u_3\|$, όπου

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_2, v_3\rangle}{\langle v_2, 2\rangle} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ συνεπώς } e_3 = \sqrt{2/3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \text{ με } P^{-1} = P^* = P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

και έχουμε ότι $P^*AP = \mathrm{diag}(5,-1,-1)$.

Άσκηση VII.8.16. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Για ένα πολυώνυμο $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ θα συμβολίζουμε με $\overline{f}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{a}_\nu x^\nu$. Αποδείξτε ότι

1. $\mathrm{ch}_{A^*}(x) = \overline{\mathrm{ch}_A}(x)$
2. $m_{A^*}(x) = \overline{m}_A(x)$
3. Αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^*.

Λύση VII.8.17. 1. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{ch}_{A^*}(x) = \det(A^* - x\mathbb{I}_n) = \overline{\det(A^t - \overline{x}\mathbb{I}_n)} = \overline{\det(A - \overline{x}\mathbb{I}_n)} = \overline{\mathrm{ch}_A(\overline{x})} = \overline{\mathrm{ch}}_A(x).$$

2. Έχουμε ότι αν $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[x]$ πολυώνυμο ώστε $f(A) = 0$ τότε

$$0 = 0^* = \overline{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (A^t)^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{a}_\nu (A^*)^\nu.$$

Συνεπώς αν $m_A(x)$ είναι το ελάχιστου βαθμού πολυώνυμο που μηδενίζει τον A, το $\overline{m}_A(x)$ είναι το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο που μηδενίζει το A^*.

3. Σαφές από το 1.

Άσκηση VII.8.18. Έστω ένας μη-μηδενικός πίνακας γραμμή $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^{n,1}$ με $n \geq 2$. Θεωρούμε την ευκλείδεια νόρμα $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Θέτουμε

$$A = \mathbb{I}_n + B, \text{ όπου } B = x^t x.$$

Αποδείξτε ότι

1. $B^2 = \|x\|^2 B$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του.
2. ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και βρείτε τις διαστάσεις των ιδιοχώρων του
3. $\det A = 1 + \|x\|^2$.

Λύση VII.8.19. Παρατηρούμε ότι αν $B = (b_{ij})$ τότε $b_{ij} = x_i x_j$. Υπολογίζουμε ότι αν $B^2 = (c_{ij})$ τότε

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} b_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{n} x_i x_\nu^2 x_j = b_{ij} \|x\|^2.$$

Αφού $B^2 = \|x\| B$ έχουμε ότι για το πολυώνυμο

$$f(x) = x^2 - (2 + \|x\|^2)x + 1 + \|x\| = (x-1)(x - (1 + \|x\|^2))$$

ισχύει ότι $f(A) = \mathbf{0}$. Επειδή δε κανένας από τους δύο γραμμικούς παράγοντες δεν μηδενίζουν τον A αυτό είναι το ελάχιστο.

Για τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 1 έχουμε ότι αποτελείται από τα διανύσματα ν ώστε

$$(A - \mathbb{I}_n)\nu = x^t x \nu = 0$$

και ότι κάθε διάνυσμα ν που είναι κάθετο στο x ανήκει στον ιδιόχωρο αυτό. Άρα ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής 1 έχει διάσταση $\geq n - 1 = \dim\langle x\rangle^\perp$. Αφού ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $1 + \|x\|^2$ έχει διάσταση ≥ 1 έχουμε ότι οι ιδιαστάσεις των ιδιόχωρων είναι $n-1$ και 1 αντίστοιχα. Τέλος η ορίζουσα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών άρα ίση με $1 + \|x\|^2$.

Άσκηση VII.8.20. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $a_1, \ldots, a_n$ οι γραμμές του A. Ισχύει ότι

$$\|a_1\| \cdots \|a_n\| \geq |\det A|$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν τα $a_1, \ldots, a_n$ είναι ορθογώνια ή κάποιο $a_i = \mathbf{0}$.

Λύση VII.8.21. Αν A δεν είναι αντιστρέψιμος η ανισότητα ισχύει με προφανή τρόπο και γίνεται ισότητα στην περίπτωση που κάποιο $a_i = \mathbf{0}$.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε από την πρόταση VII.7.12 υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας B με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο ώστε ο πίνακας $BA = U$ να είναι μοναδιαίος. Έχουμε ότι

$$|\det U|^2 = \det U \det U^* = \det UU^* = \det \mathbb{I}_n = 1.$$

Γράφουμε

$$|\det(A)| = |\det\big(B^{-1}U\big)| = |\det\big(B^{-1}\big)| = b_{11}^{-1} \cdots b_{nn}^{-1}$$

από την άλλη έχουμε ότι πίνακας $B^{-1} = (c_{ij})$ είναι κάτω τριγωνικός με $c_{ii} = b_{ii}^{-1}$.

$$\begin{aligned} a_i &= (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, b_{ii}^{-1}, 0, \ldots, 0)U \\ &= c_{i1}U^1 + c_{i2}U^2 + \cdots + b_{ii}^{-1}U^i \text{ όπου } U^1, \ldots, U^n \text{ οι στήλες του } U. \end{aligned}$$

Άρα

$$\|a_i\|^2 = |c_{i1}|^2 \|U^1\|^2 + \cdots + |b_{ii}^{-1}|^2 \|U^i\|^2 = |c_{i1}|^2 + \cdots + |b_{ii}^{-1}|^2 \geq |b_{ii}^{-1}|^2. \tag{VII.13}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$|a_1| \cdots |a_n| \geq b_{11}^{-1} \cdots b_{nn}^{-1} = |\det(A)|.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η ανισότητα (VII.13) γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $c_{i1} = \cdots = c_{i,i-1} = 0$, ισοδύναμα αν και μόνο αν $a_i = b_{ii}^{-1}U^i$, αν και μόνο αν οι γραμμές a_i είναι ανά δύο ορθογώνιες.