Η γενική μορφή μιας τετραγωνικής εξίσωσης στον χώρο $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n)^t \; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2 [E_1, \dots, E_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + F = 0 \quad (1)$$

$A = A^t$

$$P^t A P = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Υπάρχει P μοναδιαίος :

$P^t P = \mathbb{I}_n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad x = P X$, $\quad P^t x = X$

Άρα

$$(1) \Rightarrow X^t P A P^t X + (E_1, \dots, E_n) P X + F = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{X^t diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X}+ 2 (E_1, \dots, E_n) P X + F = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{v=1}^{n} (E_v P_{v,i})}_{Q_i} X_i + F = 0$$

$P = (P_{v,i})$

$Q_i = \sum_{v=1}^{n} E_v P_{v,i}$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} Q_i X_i + F = 0$$

$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ οι ιδιοτιμές } \neq 0 \\ \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \text{ οι μηδενικές ιδιοτιμές.} \end{array}}$

$\forall \lambda_i \neq 0$: $Y_i = X_i + a_i$ (για να "απορροφήσουμε" το τετράγωνο)

$$\lambda_i (\underbrace{X_i + a_i}_{Y_i} - a_i)^2 + 2 Q_i X_i =$$

$$\lambda_i Y_i^2 \underline{- 2 \lambda_i a_i Y_i} + \lambda_i a_i^2 + \underline{2 Q_i Y_i} - 2 Q_i a_i$$

Διαλέγοντας κατάλληλα το a_i, εξαφανίζω το Y_i!

$$+ 2(-\lambda_i a_i + Q_i) Y + \lambda_i a_i^2 - 2 Q_i a_i$$

$a_i = \dfrac{Q_i}{\lambda_i}$

γίνεται

$$\lambda_i a_i^2 - 2 Q_i a_i = \lambda_i \frac{Q_i^2}{\lambda_i^2} - 2 \frac{Q_i Q_i}{\lambda_i} = - \frac{Q_i^2}{\lambda_i}$$

Συνέχεια Σελ. 2

29.11.23

Άρα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Y_i^2 + 2\sum_{i=k+1}^{n} Q_i X_i \underbrace{- \sum_{i=1}^{k} \frac{Q_i^2}{\lambda_i} + F}_{C} = 0 \quad (*)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} Y_i = X_i + a_i & 1 \le i \le k \\ Y_i = X_i & k+1 \le i \le n \end{array}}$$

Αν $k=n$ ή $Q_{k+1} = \dots = Q_n = 0$, τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Y_i^2 = C$$ ~ κανονική εξίσωση υπερεπιφάνειας με κέντρο συμμετρίας

$k=n$ μη εκφυλισμένη

$k<n$ εκφυλισμένη

- Θέλουμε να βάλουμε νέα μεταβλητή Y: $\boxed{Y = -\sum_{i=k+1}^{n} Q_i X_i}$

με τον εξής πίνακα αλλαγής μεταβλητής.

$$P_1 = \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad \quad \quad}^{k} & & & \overbrace{\quad}^{n-k} \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -Q_{k+1} \cdots -Q_n \\ \hline & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \neq 0 \\ \end{array}$$

$k+1$ γραμμές γραμμικά ανεξάρτητες και ορθογώνιες

$$q = \sqrt{Q_{k+1}^2 + \dots + Q_n^2}$$

διαιρώ την γραμμή με το μέτρο της

έτσι έχουμε ορθοκανονικά διανύσματα $(k+1)$

Έτσι έρχομαι και προσθέτω από κάτω $n-(k+1)$ γραμμές ώστε οι γραμμές να είναι ορθογώνιες και ο πίνακας μοναδιαίος.

Έτσι κάνοντας αλλαγή μεταβλητής πολλαπλασιάζοντας με τον P_1:

Η $(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z_i^2$

$Z_i = Y_i$

$Z_{k+1} = -\frac{1}{q} \sum_{i=k+1}^{n} Q_i Y_i$

$Z_{k+2} = \dots$ → δεν μας νοιάζουν γιατί δεν θα εμφανιστούν

Η εξίσωση γίνεται:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z_i^2 = 2q Z_{k+1} + C$$

κάνω ακόμα μια αλλαγή μεταβλητής!

θέτω $z_{k+1}' = z_{k+1} - \frac{c}{2q}$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i^2 = 2q z_{k+1}'$ κάτι που μοιάζει με παραβολή. ($y^2 = ax$)

Διερευνηση :

• $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, $n=3$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = c$ (Η κανονική μη εκφυλισμένη εξίσωση)

$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $c>0$

Το ίδιο για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ και $c<0$

Αν $c<0$ → δεν έχει πραγματική λυση

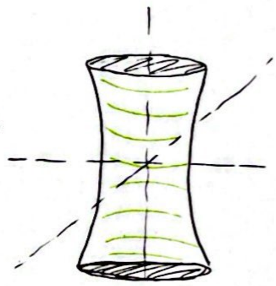
για $c=0$

→ παίρνω το σημείο $(0,0,0)$

• $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = c$ → υπερβολή εκ περιστροφής.

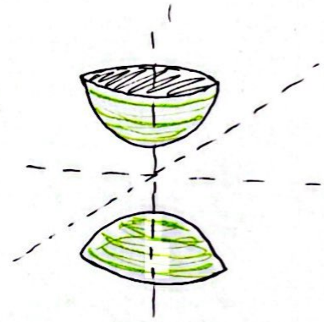
$c>0$ →



⋮

[Υπάρχουν 19 διαφορετικές περιπτωσεις.] Quadratic surface wikipedia

$c<0$ →



Μερικές ακόμα :

$\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 = c$

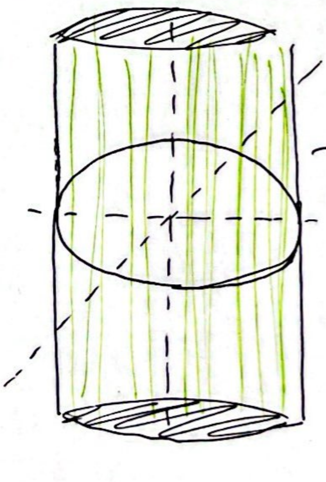
διερευνηση στις 2 διαστάσεις

$\lambda_1 > 0$

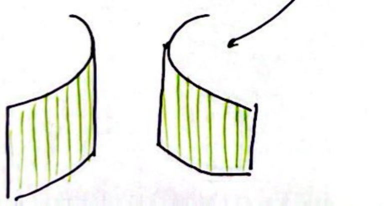
$\lambda_2 > 0$

$c > 0$

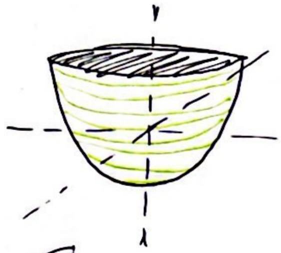
$\frac{Y_1^2}{a^2} + \frac{Y_2^2}{\beta^2} = c$



κυλινδρος

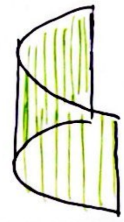


$$\rightsquigarrow \quad \frac{Y_1^2}{a^2} + \frac{Y_2^2}{\beta^2} = z$$



$$\Big\downarrow$$

$$\frac{Y_1^2}{a^2} = z \longrightarrow$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x,y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

1) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έχει ρίζες: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
και υπολογίζουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα
για την τιμή $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ είναι το $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

και για την $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ — '' — $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Έτσι αν: $P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, τότε

!

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

- ο πίνακας P δεν είναι μοναδιαίος.
  (Η διαγωνοποίηση δεν δίνει μοναδιαίους)
- $A = A^t$: οι ιδιόχωροι του είναι κάθετοι μεταξύ τους, άρα πρέπει να ορθοκανονικοποιήσω τα ιδιοδιανύσματα.

Αυτά τα διανύσματα όμως είναι κάθετα μεταξύ τους, άρα αρκεί να τα διαιρέσουμε με το μέτρο τους:

Τα μέτρα: $q_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $q_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

Συνέχεια

σελ. 5

οπότε

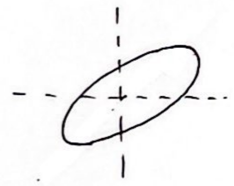
$$P_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2q_1} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2q_2} \\ 1/q_1 & 1/q_2 \end{pmatrix}$$

$$x = P_1 X \Rightarrow P_1^{t} x = P_1^{-1} x = X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Άρα η εξίσωσή μας γίνεται:

$$\underbrace{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}_{>0} X_1^2 + \underbrace{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}_{>0} X_2^2 = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad a = \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}$$



$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1$$ → έλλειψη μετά από αλλαγή σ. συντεταγμένων.

Δεν ήθελε καθόλου διερεύνηση γιατί δεν έχει γραμμικό κομμάτι!

Άρα

$x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ → δεν έχει γραμμικό κομμάτι!

$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ → $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Η καμπύλη είναι έλλειψη γιατί έχει 2 θετικές ιδιοτιμές

Σελ. 6

$$P_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \sqrt{\dfrac{2}{5+\sqrt{5}}} & \sqrt{\dfrac{1}{10}(5+\sqrt{5})} \end{pmatrix}$$

για μετά

Αν μας έδινε: $x^2+2xy+2y^2+\underbrace{2x+2y}=1$ έχει γραμμικό κομμάτι!

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2(1,1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1.$$

$$\lambda_1X_1^2+\lambda_2X_2^2+\underbrace{2(1,1)P_1\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}}_{2Q_1X_1+2Q_2X_2}=1.$$

$P_1=$(από σελ. 5)

$Q_1=\left(\frac{1+\sqrt5}{\sqrt{2(5+\sqrt5)}}+\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt5}}\right.$

$Y_1=X_1+a_1$

$Y_2=X_2+a_2$

Άρα $\lambda_1Y_1^2+\lambda_2Y_2^2=1+*$

* κάτι, μια σταθερά με πολλές πράξεις, που αλλάζει την μορφή της εξίσωσης, αν δηλαδή το 2ο μέλος είναι θετικό (έλλειψη) αρνητικό (αδύνατο) ή μηδέν (σημείο).

Παράδειγμα ② $4x^2+4y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz-12x+6z-12y=0$

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\-2&?&-2\\4&-2&4\end{pmatrix}$$

το λυμένο στο βιβλίο είχε εδώ ①, ενώ θα έπρεπε ④ Άρα ή έχει γίνει τυπογραφικό στον πίνακα ή στην εξίσωση, εμείς συνεχίζουμε με τις ιδιοτιμές που δίνει.

ιδιοτιμές: $\lambda_1=9,\ \lambda_2=0$

$\dim E_0=2$, $E_0=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $E_9=\left\{\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}\right\}$

Gram - Schmidt:

$$\left\{\frac{2}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix},\frac{5}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2/3\\-4/5\end{pmatrix}\right\}\rightsquigarrow P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&\cdot\\-1/3&2/5&\cdot\\2/3&1/\sqrt5&\cdot\end{pmatrix}$$

$$\overset{\cdots}{\to}P^tAP=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow$$

Σελ. ⑦

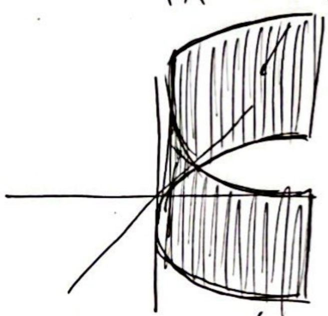
Άρα $9x_1^2 - (12,12,6)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$ — αλλαγή μεταβλητής

$$9x_1^2 - (12,12,6)\,\underline{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0$$

$$9x_1^2 + \underbrace{\frac{18}{\sqrt{5}}x_2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x_3}_{} = 0$$

αλλαγή μεταβλητής να τα μαζέψω και διαιρώ με το μήκος της.

$$9x''^2 = 2\sqrt{12}\,y'$$



→ παραβολικός κύλινδρος.

γιατί ανεβαίνει; γιατί η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη!

$x^2+y^2=1$ ← εξίσωση κυλίνδρου