Διάλεξη ② 4.10.23

Επανάληψη: $\mathbb{F}[x]$ πολυώνυμα

- $\deg : \mathbb{F}[x] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$
- $\deg(f+g) = \max\{\deg f, \deg g\}$ } $f, g \neq 0$
- $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$

- Τα αντιστρέψιμα πολυώνυμα είναι αυτά που έχουν βαθμό 1 (σταθερές) $(\neq 0)$
  ↳ $f \cdot g = 1 \Rightarrow \deg(f \cdot g) = \deg 1 = 0$
  $\deg f + \deg g$ ⟶ 2 φυσικοί άθροισμα 0. ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $f, g \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$)

- Μονικά Πολυώνυμα: $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
  ↳ $a_n = 0$
  για $a_n x^n + \dots + a_0 = f(x) \Rightarrow a_n^{-1} f(x)$: μονικό

- $f(x), g(x)$, $g(x) \neq 0$

$f(x) = g(x)\pi(x) + \upsilon(x)$
- $\upsilon(x) = 0 \to g(x) \mid f(x)$
- $\upsilon(x) \neq 0 \to 0 \leq \deg \upsilon(x) < \deg \pi(x)$

- **Ανάγωγο Πολυώνυμο**

$p(x)$: ανάγωγο πολυώνυμο αν και μόνο αν οι διαιρέτες είναι $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ είτε $c\,p(x)$ $\deg p(x) \geq 1$

⤳ $\boxed{\text{Το πολυώνυμο } f(x) \text{ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν } a_n^{-1} f(x) = x^n + \dots \text{ μονικό, είναι ανάγωγο.}}$

	Αντιστρέψιμος	πρώτοι	$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	$\{\pm 1\}$	$p > 1$	$n \geq 0$
$\mathbb{F}[x]$	$c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$	μονικά ανάγωγα	μονικά πολυώνυμα

↳ Κάθε πολυώνυμο f γράφεται με μοναδικό τρόπο
$f(x) = c\; P_1(x)^{a_1} \cdots P_s(x)^{a_s}$ μονικά ανάγωγα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (με επαγωγή στον βαθμό)

- Πολυώνυμο βαθμού 0: $f(x) = c\, P_1^0 \cdots P_t^0$
  βαθμού 1: $f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ μονικό ανάγωγο.

⟶

Παρένθεση: Κάθε πολυώνυμο βαθμού 1 είναι ανάγωγο

$f(x) = a(x)\,b(x)$

$1 = \deg f(x) = \deg a(x) + \deg b(x)$

$1 + 0$ ή $0 + 1$

$a(x) = c$

$f(x) = c\,b(x)$

$c^{-1} f(x) = b(x)$

Συνέχεια απόδειξης:

Επαγωγική υπόθεση: Η πρόταση ισχύει για όλα τα πολυώνυμα

$f(x)$ βαθμού n είναι ανάγωγο?

→ Ναι: βαθμού $<n$ Τέλος

→ Όχι: υπάρχει πολ. $\pi(x)$: $\deg \pi(x) > 1$, $\pi(x) \mid f(x)$

$f(x) = \pi(x) \cdot g(x)$ ⟶ εφαρμόζω την επαγωγική υπόθεση για τα $\pi(x), g(x)$

$n = \deg 1 = \deg \pi(x) + \deg g(x)$, >1

$$\boxed{f(p) = 0 \iff (x-p) \mid f(x)}$$

$f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$f(a)$ για $a \in \mathbb{F}$ $\rightsquigarrow$ $f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i \in \mathbb{F}$

$f(x) = \pi(x) \cdot (x-a) + v$

→ $v = 0$

→ $v \neq 0$, $\deg v < \deg(x-a)$, $\deg v = 0$

$v = f(a)$

$f(a) = \pi(a)\cancel{(a-a)} + v$, $\cancel{(a-a)} = 0$

- Κάθε πολυώνυμο βαθμού 1 είναι ανάγωγο.

Υπάρχουν πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού που είναι επίσης ανάγωγα

π.χ. $x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο

Αν δεν ήταν ανάγωγο $x^2+1 = a(x) \cdot b(x)$ → οι βαθμοί: $2 = 1 + 1$

βαθμού 1

$a(x) = ax + b$ → έχει ρίζα $x = -b/a$

η οποία θα ήταν ρίζα του x^2+1 άτοπο

Συνέχεια Σελ (3)

Στο $\mathbb{C}$ όμως: $X^2+1 \in \mathbb{C}[X]$ δεν είναι ανάγωγο:

$(X^2+1) = (X+i)(X-i)$

4.10.2023

$\cdot \; \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας:

$\boxed{\text{Κάθε πολυώνυμο } \mathbb{C}[X] \text{ έχει μια ρίζα}}$

$$\mathbb{C}[X] \ni f(x) = \underset{\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\underset{\cap}{c}}\, \underbrace{(X-\rho_1)\cdots(X-\rho_n)}_{\text{μονικά ανάγωγα}}$$

Για το $\mathbb{C}[X]$ τα ανάγωγα είναι τα πολυώνυμα βαθμού 1.

Για το $\mathbb{R}[x]$ τα ανάγωγα?

$f(x) \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

$f(x) = c(X-\rho_1)\cdots(X-\rho_n) \;,\; \rho_1,\dots,\rho_n \in \mathbb{C}$ (*)

Θυμάμαι: $\left\{\begin{array}{ll} f(\rho)=0 & ,\rho = a+ib \\ f(\bar{\rho})=0 & \bar{\rho} = a-ib \end{array}\right\}$ συζυγής $(a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a_i} = a_i)$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$0 = f(\rho) = \sum_{i=0}^{n} a_i \rho^i$$

$$0 = \bar{0} = \overline{f(\rho)} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \rho^i} = \sum_{i=0}^{n} \bar{a_i}\,\bar{\rho}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i(\bar{\rho})^i = f(\bar{\rho})$$

Άρα (*) $\Rightarrow$

$f(x) = c(X-\rho_1)\cdots(X-\rho_s)(X-r_1)(X-\bar{r_1})$?

$\rho_1,\dots,\rho_s \in \mathbb{R}$

$r_1,\dots,r_t \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Σβήστηκαν

...

Άρα για το $\mathbb{R}[X]$:

$aX-\rho \;,\; a,\rho \in \mathbb{R} \;,\; a \neq 0$

τα πολυώνυμα βαθμού 2 με αρνητική διακρίνουσα.

4.10.23

Για $\mathbb{Q}[x]$ έχω πολυώνυμα κάθε βαθμού (Άλγεβρα)
↳ ανάγωγα

$1+x+x^2+\dots+x^{p-1}$, p: πρώτος : είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}$

ΜΚΔ
ΕΚΠ
μονικά πολυώνυμα

d — $a, b \in \mathbb{F}[x]$, $a, b \neq 0$

μονικό πολυώνυμο d, $d|a$, $d|b$ και αν $\delta \in \mathbb{F}[x]$: και $\delta|a$, $\delta|b$ τότε $\delta|d$

m των a, b

μονικό πολυώνυμο m, $a|m$, $b|m$ και αν $\mu \in \mathbb{F}[x]$ και $a|\mu$, $b|\mu$ τότε $m|\mu$

⇝ Το ΜΚΔ το υπολογίζουμε με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$a = b\pi + \upsilon$

$(a,b) = (b,\upsilon)$
ίδιο ΜΚΔ

$\left.\begin{matrix} d|a \\ d|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d|\upsilon$

$\left.\begin{matrix} d|b \\ d|\upsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow d|a$

- $a = b\pi_1 + \upsilon$, αν $\upsilon = 0$ $b|a \Rightarrow (a,b) = b$

$b = \upsilon\pi_2 + \upsilon_2$, αν $\upsilon_2 = 0$ $(b,\upsilon) = \upsilon$
$\qquad (b,a)$

$\upsilon = \upsilon_2\pi_3 + \upsilon_3 \quad \dots$

↳ Αυτή η διαδικασία κάποια στιγμή σταματάει γιατί
$\deg \upsilon_3 < \deg \upsilon_2 < \deg \upsilon < \deg b \in \mathbb{N}$
↳ ακολουθία φυσικών

$\boxed{\upsilon_n} = 0$
↳ ΜΚΔ

Αυτό το γράφουμε ως γινόμενο μονικών:

$f(x) = c\, p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ — $p_1, \dots, p_s$ μονικά ανάγωγα, $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{N}$

$g(x) = c'\, p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}$

ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής

Για να εφαρμόζουμε αυτόν τον τύπο πρέπει να ξέρουμε την ανάλυση

$(f,g) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \cdots p_s^{\min(a_2 b_2)}$ — ΜΚΔ

$[f,g] = p_1^{\max(a_1,b_1)} \cdots p_s^{\max(a_s,b_s)}$ — ΕΚΠ και ισχύει ότι: $\boxed{(f,g)\cdot[f,g] = f\cdot g(c\cdot c')^{-1}}$ 4.10.23

και αν $(f,g)=1 \Rightarrow f,g$ "πρώτα μεταξύ τους".

$L: V \to V$

Ένας υπόχωρος $W \subset V$ θα λέγεται $\boxed{L\text{-αναλλοίωτος}}$ αν $L\cdot W \subset W$.

πχ) V, $\overset{=B}{\{e_1, e_2\}} \to$ βάση του V και $W = \langle e_1 \rangle$

$\rightsquigarrow Le_1 = ae_1 + be_2$ $\quad (L,B,B) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

$\rightsquigarrow Le_2 = ce_1 + de_2$

Το $\langle e_1 \rangle = W$ είναι L-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $b<0$.

- Ένας <u>μονοδιάστατος</u> υπόχωρος του V με βάση e $\hookrightarrow W = \langle e \rangle$ είναι L-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $Le = \lambda e$ για $\lambda \in \mathbb{F}$

$\hookrightarrow$ <u>προφανές</u>: Αν $Le = \lambda e$ τότε $w \in W$, $w = ae$

$Lw = Lae = aLe = \lambda a e \in \langle e \rangle$

Αντιστρόφως: Αν $L\langle e \rangle \subset \langle e \rangle$ τότε $Le \in \langle e \rangle \Rightarrow Le = \lambda e$

ΟΡΙΣΜΟΣ:
- $\lambda \in \mathbb{F}$ θα λέγεται ιδιοτιμή της L ($L: V \to V$) αν $\exists e \in V$ ώστε $Le = \lambda e$ $(e \neq 0)$
- Το e θα λέγεται ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής L.

$\hookrightarrow Le = \lambda e \Rightarrow \underbrace{(L-\lambda I)}_{\text{πίνακας } A} e = 0$

Για να λογαριάσουμε ιδιοτιμές ψάχνουμε να βρούμε τα $\lambda \in \mathbb{F}$ ώστε $Ker(L-\lambda I) \neq \{0\}$

Η εξίσωση $AX=0$ έχει την μηδενική λύση, ή και άλλες.

Διαλέγω B βάση του V και $A = (L,B,B) \to n\times n$ πίνακας

Θέλουμε να βρούμε τα $\lambda \in \mathbb{F}$ ώστε ο πίνακας $(A - \lambda I_n)$ να μην είναι αντιστρέψιμος (άρα $ker \neq 0$)

Άρα ψάχνουμε τα $\lambda \in \mathbb{F}$ ώστε $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Αυτή η έκφραση είναι ένα πολυώνυμο τα λ και θα το ονομάζουμε $\boxed{\text{χαρακτηριστικό πολυώνυμο.}}$

Παράδειγμα: $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=A$. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο 4.10.23

$$ch_A(x)=\det(A-xI_2)=\det\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix}1-x&0\\1&1-x\end{pmatrix}=(1-x)^2$$

θα το κάνουμε συνέχεια!!!

Για έναν nxn πίνακα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι βαθμού n.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$G=(G_{ij})$ $\det G=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\,\sigma\, C_{1,\sigma(1)}C_{2,\sigma(2)}\cdots C_{n,\sigma(n)}$

$G=(A-xI_n)$ ±1 (μεταθέσεις)

$\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές

↳ Στο παράδειγμα πάνω (ιδιοτιμές το 1)

~ Αν λ ιδιοτιμή, $Ker(A-I_n\cdot\lambda)$ είναι μη τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$

$Ker(L-\lambda Id_V)$ — " — υπόχωρος του V

Ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$A=QBQ^{-1}$ Q: αντιστρέψιμος

$$ch_A(x)=\det(A-xI_n)=\det(QBQ^{-1}-xQQ^{-1})=$$
$$\det(Q(B-xI_n)Q^{-1})=\cancel{\det Q}\,\det(B-xI_n)\,\cancel{\det Q^{-1}}\ \checkmark$$