

## Ασκήσεις

18/10/2023

- (1) Ναδειχθεί ότι κάθε άνω τριγωνικός πίνακας  $A = (a_{ij})$  έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\text{Ch}_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x).$$

- (2) Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες  $A, A^t \in \mathbb{F}^{n,n}$  έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- (3) Δίνεται ο πίνακας  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n,n}$  με  $a_{ij} = 1$  για κάθε  $1 \leq i, j \leq n$ . Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $Q$  ώστε  $Q^{-1}AQ = \Delta$ , όπου  $\Delta$  διαγώνιος πίνακας.
- (4) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $Q$  ώστε  $Q^{-1}AQ = \Delta$ , όπου  $\Delta$  διαγώνιος πίνακας.

- (5) Δίνονται οι πίνακες  $A \in \mathbb{F}^{n,m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{m,n}$ . Τι σχέση έχουν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πίνακων  $AB$  και  $BA$ ; Αν  $n = m$  ναδειχθεί ότι οι πίνακες  $AB$  και  $BA$  έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- (6) Να δείξετε ότι η γραμμική συνάρτηση  $T : V \rightarrow V$ , όπου  $V$  είναι ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και δίνεται από  $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$  δεν έχει ιδιοτιμές.
- (7) Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση  $D : V \rightarrow V$ , όπου  $V$  είναι ο διανυσματικός χώρος των διαφορίσιμων συναρτήσεων  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $Df = f'$ . Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της  $f$ .
- (8) Να αποδειχθεί ότι  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{Z}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .