

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ & ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ (ΣΕΠ19)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

Πρόβλημα 1 (Υπολογισμός σημείων ισορροπίας). Υπολογίστε τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας Nash στα παρακάτω παίγνια 2 παικτών:

(1α) Γενικά παίγνια 2×2 :

(2, 2)	(0, 3)	(1, 1)	(0, 2)	(3, 2)	(1, 1)	(-10, -10)	(2, 1)
(3, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 3)	(1, 2)	(0, 0)

(1β) Παίγνια μηδενικού αθροίσματος:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1γ) Παίγνια με κυριαρχημένες στρατηγικές:

(7, 4)	(5, 3)	(3, 2)	(3, 2)	(10, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(4, 6)	(6, 0)	(1, 1)	(3, 2)	(2, 3)
(2, 1)	(3, 5)	(2, 8)	(2, 1)	(4, 8)	(0, 6)

Στην περίπτωση (1β), υπολογίστε επίσης την αξία του εκάστοτε παιγνίου. ✱

Πρόβλημα 2 (Διαγώνια παίγνια). Υπολογίστε την αξία και τις βέλτιστες στρατηγικές των παικτών στο διαγώνιο $n \times n$ παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με πίνακα πληρωμών

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

όπου $a_1, \dots, a_n > 0$. ✱

Πρόβλημα 3 (Ένα παίγνιο με συνεχή σύνολα δράσεων). Έστω ένα συνεχές παίγνιο δύο παικτών όπου κάθε παίκτης επιλέγει έναν αριθμό από το διάστημα $[0, 1]$. Αν x_1 και x_2 οι επιλογές των δύο παικτών, η πληρωμή του πρώτου παίκτη δίνεται από τη συνάρτηση

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x_1 < 1/2 \text{ και } x_2 = 0 \\ -1 & \text{αν } x_1 \geq 1/2 \text{ και } x_2 = 1 \\ 0 & \text{άλλως.} \end{cases}$$

Υπολογίστε τις λύσεις minimax και maximin των παικτών και, εφόσον υπάρχει, την αξία του παιγνίου. ✱

Πρόβλημα 4 (Οι μειοψηφίες κερδίζουν). Θεωρείστε το παρακάτω (συμμετρικό) παίγνιο τριών παικτών: Υπάρχουν δύο δωμάτια, και κάθε παίκτης επιλέγει ένα εξ αυτών· αν είναι μόνος του, κερδίζει 1, αν όχι, 0.

(1) Γράψτε την αναπαράσταση του παιγνίου σε κανονική μορφή.

(2) Υπολογίστε τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας Nash του παιγνίου. ✖

Πρόβλημα 5 (Η δυναμική των αντιγραφών). Γράψτε τη δυναμική των αντιγραφών για καθένα από τα παίγνια 2×2 του **Προβ. 1**. Ως παράδειγμα απάντησης, στο διπινακοπαίγνιο

$$\begin{pmatrix} (1, -1) & (-1, 1) \\ (-1, 1) & (1, -1) \end{pmatrix}$$

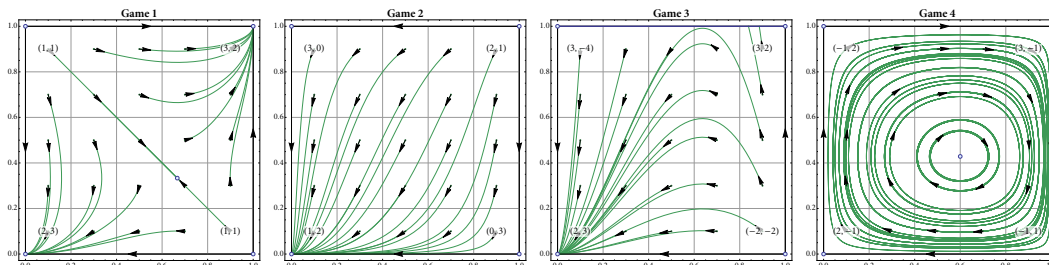
η δυναμική των αντιγραφών είναι

$$\dot{x} = 2x(1-x)(2y-1)$$

$$\dot{y} = 2y(1-y)(1-2x)$$

όπου x η πιθανότητα με την οποία ο Π1 παίζει την πρώτη του στρατηγική και y η αντίστοιχη στρατηγική για τον Π2. Για κάθε ένα από τα παραπάνω παίγνια, γράψτε όλα τα στάσιμα σημεία της δυναμικής των αντιγραφών. ✖

Πρόβλημα 6 (Διαγράμματα τροχιών). Κάθε ένα από τα παρακάτω πορτρέτα φάσεων αναπαριστά τις τροχιές της δυναμικής των αντιγραφών σε ένα παίγνιο 2×2 .



Σε κάθε διάγραμμα, τα στάσιμα σημεία της δυναμικής απεικονίζονται με μπλε (υπάρχουν 5 στάσιμα σημεία στο πρώτο διάγραμμα, 4 στο δεύτερο, 2 μεμονωμένα και ένα συνεχές σύνολο στάσιμων σημείων στο τρίτο, και 5 σημεία στο τέταρτο). Για κάθε στάσιμο σημείο που απεικονίζεται, να αποφανθείτε εάν:

- (1) Είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας Nash.
- (2) Είναι ευσταθές κατά Lyapunov.
- (3) Είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

[Σημείωση: στο τρίτο διάγραμμα μπορείτε να απαντήσετε ποιοτικά / προσεγγιστικά.] ✖