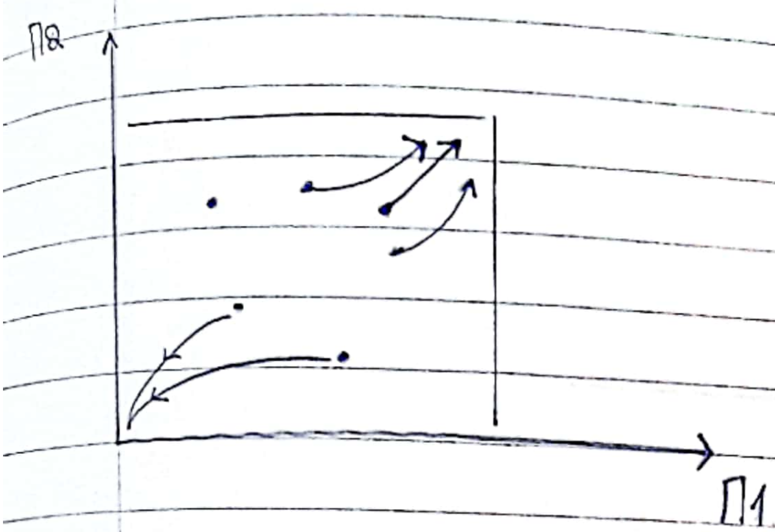
$$\dot{x}_{iai} = x_{iai} \cdot [u_{iai}(x) - u_i(x)]$$

ΓΡΑΦΕΙΣ
Βάλια Ευθυμίου
Βασιλική Μαυρογεώργου

Δυναμική εκθετικών βαρών
(Exponential Weight Dynamics)



Δευτέρα 27/12/23

νασκόπηση
- Στοιχεία Παιχνιδιών Πληθυσμού
  - Συμμετρικά / Μη συμμετρικά Συνταιριάσματα
  - Παίγνια Συμφόρησης
  - Έννοιες Ισορροπίας

Δυναμική των αντιγραφέων (Replication Dynamics)
- 3 διαφορετικές μορφές / ερμηνείες

$$\dot{x}_{iai} = x_{iai} [u_{iai}(x) - u_i(x)]$$

- Παραδείγματα σε 2x2, 2x2x2 παίγνια

Βασικές ιδιότητες των RD

- **Καλώς τοποθετημένο σύστημα (well-posed)**
Για κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$, η RD επιδέχεται μοναδική λύση $x(\tau)$ με αρχ. συνθ. $x(0)$ και η οποία ορίζεται $\forall t \geq 0$ (Picard – Lidelof)

Ύπαρξη & μοναδικότητα λύσεων για μια αρχική συνθήκη

- **Αυτοσυνέπεια:** Αν η αρχική συνθήκη $x(0) \in X$ τότε $x(t) \in X$ $\forall t \geq 0$

- **Συνέπεια αναπαραγωγής / Έλλειψη μεταλλάξεων** ("Strategies breed true")

– Αν $x_{i a_i}(0) > 0 \Rightarrow x_{i a_i}(t) > 0$ $\forall t \geq 0$
– Αν $x_{i a_i}(0) = 0 \Rightarrow x_{i a_i}(t) = 0$ $\forall t \geq 0$

Αν ο παίκτης i παίζει την $t=0$ την a_i με θετική πιθανότητα αυτό θα ισχύει για πάντα

Δεν θα εμφανιστεί μια στρατηγική που δεν είχε θετική πιθανότητα την $t=0$!

Κάθε έδρα του πλέγματος X παραμένει αναλλοίωτη υπό την εξέλιξή της (RD)

Απαλοιφή Κυριαρχημένων Στρατηγικών (υπό την RD)

Θα κοιτάξουμε αμιγείς στρατηγικές που κυριαρχούνται από αμιγείς στρατηγικές.

$a_i \prec \beta_i \iff u_i(a_i, x_{-i}) < u_i(\beta_i, x_{-i})$

Ερώτημα: Αν $a_i \prec \beta_i$, έχουμε $x_{i a_i}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$?

Απαντ.) Θυμόμαστε την εκθετική αναπαράσταση της (RD)

Έστω $y_{i a_i} = u_{i a_i}(x(t)) = u_i(a_i, x_{-i}(t))$

Ομοια

$$\dot{y}_{iB_i} = V_{iB_i}(\cdot x(t)) = u_i(B_i; x_{-i}(t))$$

$$\Rightarrow \dot{y}_{ia_i} - \dot{y}_{iB_i} = [u_i(a_i, x_{-i}(t)) - u_i(B_i, x_{-i}(t))]$$

$$\underset{a_i < B_i}{\Rightarrow} \quad \dot{y}_{ia_i} - \dot{y}_{iB_i} < -m \quad \text{για καποιο } m > 0$$

$$\underset{\int dt}{\overset{\text{ολοκλ}}{\Rightarrow}} y_{ia_i} - y_{iB_i} \leq c - mt$$

Ομως $\dfrac{x_{ia_i}}{x_{iB_i}} = \dfrac{\dfrac{\exp(y_{ia_i})}{\cancel{Z}}}{\dfrac{\exp(y_{iB_i})}{\cancel{Z}}} = e^{(y_{ia_i} - y_{iB_i})}$

$\leq e^{(c-mt)} \Rightarrow x_{ia_i}(t) \to 0$ εκθετικα | γρηγορα! $\square$

Στρατηγικη Ισορροπια για την (RD)

- Στρατηγικος Χρ/σμος: Εστω x^* ΣΣΙ Nash τότε $u_{ia_i}(x^*) \geq u_{iB_i}(x^*)$ $\forall a_i \in \text{Supp}(x_i^*)$ και $\forall B_i \in A_i$

<u>1ο Ερώτημα</u> Είναι τα ΣΣΙ Στάσιμα?

Δηλαδη αν $x(0)$ ειναι Nash, ισχυει οτι $x(t)$ Nash $\forall t$?

Απαντ) <u>Ναι</u>

Απο την συνθηκη Nash εχουμε

$$u_i(a_i, x_{-i}^*) = u_i(a_i', x_{-i}^*) \quad \forall a_i, a_i' \in \text{supp}(x_i^*)$$

$$\Rightarrow u_i(a_i, x_{-i}^*) = u_i(x^*) \quad \forall a_i \in \text{supp}(x_i^*)$$

Στην (RD): $\dot{x}_{i a_i} = x_{i a_i} \underbrace{\left[u_i(a_i; x_{-i}) - u_i(x) \right]}_{RD_{i a_i}(x)}$

Άρα αν $x(0)$ Nash $\Rightarrow RD_{i a_i}(x(0)) = 0$

$RD_{i a_i}(x^*) = x^*_{i a_i} \cdot \left[u_i(a_i; x^*_{-i}) - u_i(x^*) \right]$

$= 0$ αν $a_i \notin supp(x_i^*)$

$= 0$ αν $a_i \in supp(x_i^*)$

Fact

Παντα σε κυρτα πολυτοπα εχουμε #ευσταθων − #ασταθων $= +1$

Ευσταθεια ΣΣΙ Θα λεμε οτι το σημειο x^* ειναι Ευσταθές κατα Lyapunov όταν $\forall$ περιοχή U του x^* στο $\mathcal{X}$ υπαρχει περιοχή U' του x^* στο $\mathcal{X}$ τ.ω

$U' \subseteq U$

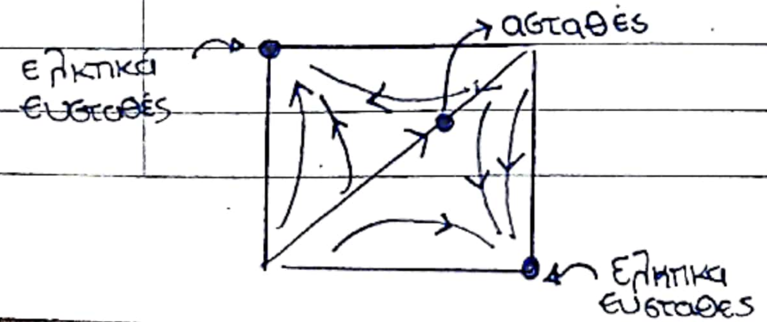
Αν $x(0) \in U' \Longrightarrow x(t) \in U \quad \forall t \geq 0$ → Αν ξεκινήσω κοντα στο x^* Παραμενω κοντα στο x^*

~~Ασυμπτωτικα Ευσταθές~~ (ελκτικο) οταν επιδεχεται μια περιοχη U στο $\mathcal{X}$ τ.ω

$x(0) \in U \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x^*$ → Αν ξεκινησουμε κοντα στο x^* συγκλινουμε στο x^*.

Ασυμπτωτικα Ευσταθές Θα λεμε οτι το x^* ειναι ασυμ. ευστ οταν ειναι ευσταθές & ελκτικο

Σχολιο Υπαρχουν σημεια που ειναι ελκτικά αλλα οχι ευσταθή (πχ μαγνητικο διπολο)



"Λαϊκό Θεώρημα της Εξελικτικής Θ. Παιγνίων (Folk Theorem)"

Θεώρημα Έστω πεπ/νο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(N, A, u)$. Τότε η δυναμική (RD) μη-συμμετρική έχει τις εξής ιδιότητες

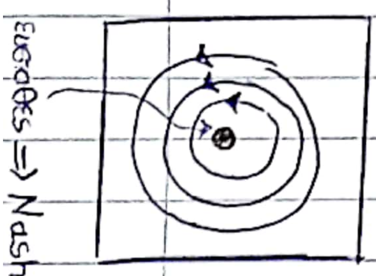
(I) Αν $x^* \in X$ Nash, τότε x^* στάσιμο υπό RD

(II) Αν $\exists$ τροχιά $x(t)$ της (RD) με πλήρες στήριγμα: $supp(x(0)) = A$ και $\lim_{t \to \infty}(x(t)) = x^*$,

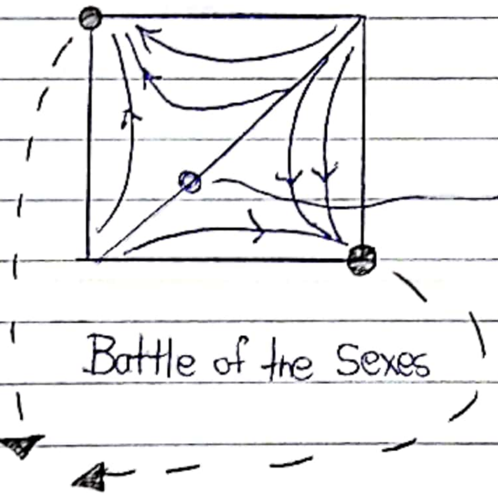
τότε το x^* είναι Nash.

(III) Αν το x^* είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) τότε είναι Nash → Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά (βλ. Battle of Sexes)

(IV) Το σημείο x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές $\Longleftrightarrow$ είναι σημείο γνήσιας ισορροπίας



Matching Pennies



→ Nash αλλά όχι ευσταθές!!

Battle of the Sexes

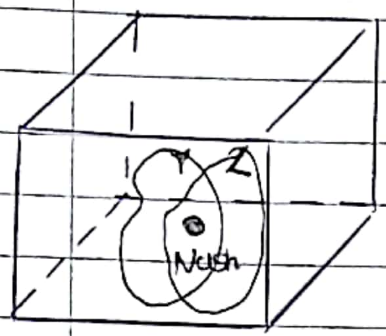
Ασυμπτωτικά $\Updownarrow$ Σημεία Γνήσιας Ισορροπίας + Εσωτερική $x(t) \to x^*$ $\Downarrow$ x^* Nash

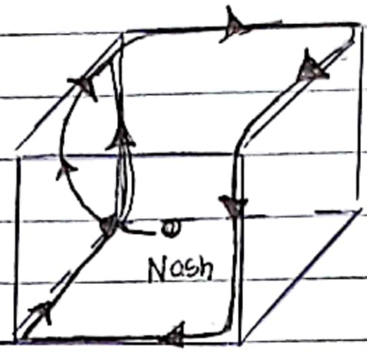
Το (IV) μας λέει ότι δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο μεικτής στρατηγικής Nash που να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

Παρατηρήσεις

① Δεν είναι όλα τα Nash "ίσα και όμοια"
Τα σημεία μεικτής ισορροπίας είναι εγγενώς λιγότερο ευσταθή

② Η (RD) μπορεί να μη συγκλίνει





Επαναληπτική (Recurrent) Συμπεριφορά
⇓
Οι τροχιές επανέρχονται "κοντά" στο σημείο από όπου ξεκίνησαν

"Παροδική" (Transient)"
↳ Οι τροχιές ξεκινάνε την αρχική θέση και συγκλίνουν σε κάποιο "ετεροκλινικό" κύκλο

Μάθηση σε ανοικτά Περιβάλλοντα (online learning)

Ακολουθία Γεγονότων (Sequence of facts)

Σε $\forall t \geq 0$:

- Ο παίκτης επιλέγει μεικτή στρατηγική x_t, $x_t \in \mathcal{X} \equiv \Delta(A)$ → Single Agent
- Το περιβάλλον καθορίζει το διάνυσμα πληρωμών $v_t \in \mathbb{R}^A$ που συναντά ο παίκτης την t
- Η μεικτή πληρωμή του παίκτη είναι $u_t = \langle v_t, x_t \rangle$

Διαφορες με το Παιχνιοθεωρητικο μοντελο

① Στα παίγνια $u_{i,t} = v_i(x(t))$ καθοριζεται απο το παιγνιο

Εδω το v_t ειναι αυθαιρετο [v_t συνεχες στο t]

② Εστιαζουμε σ'εναν παικτη και αγνοουμε τον μηχανισμο που καθοριζει το v_t

③ Ελλειψη παιγνιου ⇒ "ΣΣΙ", "κυριαρχημενες στρατηγικες" κλπ... δεν οριζονται (δεν εχουν νοημα).

Η Εννοια της μεταμελειας (Regret)

$$\boxed{Reg_p(T) = \int_0^T \left[u_t(p) - u_t(x_t)\right] dt}$$

μεταμελεια ως προς p

$p \in \mathcal{X} = \Delta(A)$ σημειο αναφορας

μεικτη πληρωμη τη στιγμη t

Καθολικη Μεταμελεια

$$Reg(T) = \max_{p \in \mathcal{X}} \left(Reg_p(T) \right)$$

Στρατηγικη ανευ μεταμελειας (no-regret)

Θα λεμε οτι η δυναμικη x_t ειναι ανευ μεταμελειας οταν $Reg(T) \in o(T)$

δηλαδη οταν $\sup\left(\frac{[Reg(T)]}{T}\right) \xrightarrow[+]{} 0$

Δηλαδή η x_t είναι ασυμπτωτική τόσο καλή όσο οποιαδήποτε μεικτή στρ/κη $p \in \mathcal{X}$

<u>Βασικό ερώτημα</u> Πως φτιάχνουμε δυναμικές στρατηγικές $x_t \in \mathcal{X}$, $t>0$ no-regret?

<u>Συγκεκριμένα:</u> Είναι η (RD) no-regret?

"Exponential Weights"

↳ EW formulation: $\dot{y}_t = v_t$

$$y(t) = \int_0^t v(s)\,ds$$

$$x_a(t) = \frac{\exp(y_a(t))}{\sum_\beta \exp(y_\beta(t))}$$

- Έστω μεικτή στρατ $p \in \mathcal{X}$
- $\mathrm{Reg}_p(T) = \int_0^T [u_t(p) - u_t(x_t)]\,dt$

$$= \int_0^T \langle v_t, p - x_t \rangle \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Reg}_p(T)\right) = \langle v_t, p - x_t \rangle$$

$$= \langle \dot{y}_t, p - x_t \rangle = \frac{d}{dt}\left[\langle y_t, p \rangle\right] - \langle \dot{y}_t, x_t \rangle$$

Ψάχνουμε μια συνάρτηση δυναμικού φ τ.ω $\frac{d}{dt}\varphi(y_t) = \langle \dot{y}_t, x_t - p \rangle$

$$\frac{d}{dt}\varphi(y_t) = \langle \dot{y}_t, \nabla\varphi(y_t) \rangle$$

Αναζητούμε συν/ση $\varphi(y)$ τω

$$\nabla\varphi(y) = x - p = \Lambda(y) - p$$

$$\downarrow$$

- Gibbs $\Lambda_a(y) = \dfrac{e^{y_a}}{\sum e^{y_B}}$

Αναλυτικά θέλουμε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_a} = \frac{\exp(y_a)}{\sum_B \exp(y_B)} - p_a$$

Έστω $\varphi(y) = \log\left(\sum_B \exp(y_B)\right) - \langle y, p\rangle$

$$Reg_p(T) = \varphi(0) - \varphi(y_t) \underset{*}{\leq} \log A$$

$\leq \log A$

* Απόδειξη (άσκηση για το σπίτι)