ΓΡΑΦΕΙΣ
Πέτρος Κούτσης
Μαριτίνα Μαρούλη

Διάλεξη 1 (02/10/2023)

Ορισμός Παιγνίων σε Κανονική Μορφή

Ένα παίγνιο αποτελείται από τα εξής 3 στοιχεία:

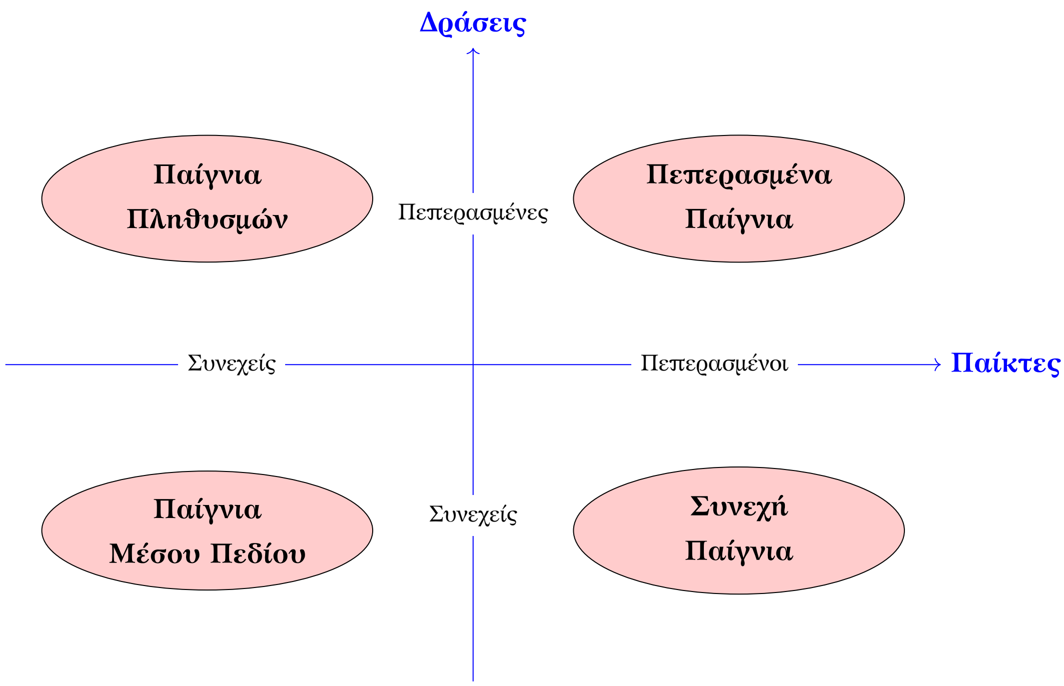
1. Ένα σύνολο παικτών (players) $i \in \mathcal{N}$,
2. Για κάθε παίκτη $i \in \mathcal{N}$, ένα σύνολο δράσεων (actions) ή αμιγών/καθαρών στρατηγικών (pure strategies) $\mathcal{A}_i$, $i \in \mathcal{N}$
3. Για κάθε παίκτη $i \in \mathcal{N}$, μία συνάρτηση πληρωμής ή ωφέλειας (payoff ή utility function) $u_i \colon \mathcal{A} = \prod_j \mathcal{A}_j \to \mathbb{R}$.

Ως παίγνιο ορίζεται η πλειάδα (tuple) $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, u)$.

Παρατήρηση. Ο όρος ”κανονική μορφή” έρχεται σε αντιδιαστολή με τα παίγνια εκτεταμένης μορφής (πχ σκάκι, go, ντάμα) και αφορά το γεγονός ότι οι παίκτες επιλέγουν δράσεις ”ταυτόχρονα”.

Ταξινόμηση Παιγνίων

Στα πλαίσια του μαθήματος μας, θα ταξινομήσουμε τα παίγνια ανάλογα με το πεπερασμένο ή το συνεχές του συνόλου των παικτών και του συνόλου των δράσεών τους. Πιο συγκεκριμένα, θα τα ταξινομήσουμε σε: Πεπερασμένα Παίγνια (Finite Games), Παίγνια Πληθυσμών (Population Games), Συνεχή Παίγνια (Continuous Games) και Παίγνια Μέσου Πεδίου (Mean Field Games).



Σημειώσεις:

1 Στην κλάση των συνεχών παιγνίων συνήθως υποθέτουμε ότι:

- $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$
- $\mathcal{A}_i =$ κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
- $u_i =$ συνεχείς και ατομικά κοίλες.

Ορισμός 1. Η συνάρτηση $u_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ καλείται ατομικά κοίλη αν είναι κοίλη ως προς τη μεταβλητή $x_i \in \mathcal{A}_i$, για κάθε $x_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, x_N \in \mathcal{A}_N$.

2 **Χρήσιμες Συμβάσεις Συμβολισμού**

- Συνήθως οι διακριτές δράσεις γράφονται ως $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$ ($\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{A}_i$), ενώ οι συνεχείς ως $x_i \in \mathcal{X}_i$.
- Η πλειάδα $(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_N)$ θα συμβολίζεται ως (x_i, x_{-i}), όπου $x_{-i} \in \mathcal{X}_{-i} \equiv \prod_{j \neq j} \mathcal{X}_j$ και θα καλείται ως το προφίλ δράσεων όλων των άλλων παικτών.

  Υπό αυτόν τον συμβολισμό στον Ορισμό 1 έχουμε ότι η συνάρτηση $u_i(x_i, x_{-i})$ καλείται ατομικά κοίλη αν είναι κοίλη ως προς τη μεταβλητή $x_i \in \mathcal{X}_i$, $\forall\, x_{-i} \in \mathcal{X}_{-i}$.
- Αν υποθέσουμε την κοιλότητα της συνάρτησης πληρωμής, το παίγνιο καλείται κοίλο (concave game) [κοίλα παίγνια $\subset$ συνεχή παίγνια].

3 **Παίγνια Πληθυσμών**

Στα παίγνια πληθυσμών θεωρούμε ότι το σύνολο παικτών είναι το διάστημα $\mathcal{N} = [0, 1]$ (ή ένα γινόμενο διαστημάτων όταν έχουμε πολλούς πληθυσμούς) εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue το οποίο συμβολίζουμε $\lambda \colon [0, 1] \to [0, 1]$.

- Στις περισσότερες εφαρμογές, το σύνολο δράσεων είναι κοινό. Ένα προφίλ δράσεων σε αυτή την περίπτωση είναι μία απεικόνιση $\alpha \colon \mathcal{N} = [0, 1] \to \mathcal{A}$ η οποία θεωρούμε, προς αποφυγήν παθολογικών περιπτώσεων, ότι είναι μετρήσιμη.
- Η κατάσταση του πληθυσμού είναι ένα διάστημα $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ (σε κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$), και $\mathrm{x}_\alpha = \lambda\{i \in \mathcal{N} : \mathcal{A}_i = \alpha\}$ το μέτρο ή η μάζα των παικτών που επέλεξαν την δράση $\alpha \in \mathcal{A}_i$.
- Τα παίγνια πληθυσμών είναι ανώνυμα δηλαδή η συνάρτηση πληρωμής κάθε παίκτη εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του πληθυσμού, δηλαδή ένας παίκτης που επιλέγει τη δράση $\alpha \in \mathcal{A}$ λαμβάνει ως πληρωμή τη ποσότητα $u_\alpha(x)$, όπου $u_\alpha \colon \Delta(A) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

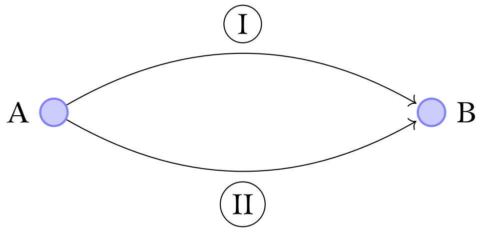
  $*$ Με $\Delta(A)$ συμβολίζουμε το simplex πιθανοτήτων (ή κυρτή θήκη) στο $\mathcal{A}$,

$$\Delta(A) = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}},\, \mathcal{X}_\alpha \geqslant 0, \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{X}_\alpha = 1\}.$$

Παραδείγματα Παιγνιών

(A) Το δίκτυο του Pigou

Δύο πόλεις, οι A, B ενώνονται με δύο δρόμους, μία λεωφόρο και έναν παράδρομο. Σκοπός είναι ξεκινώντας από την πόλη A να φτάσουμε στην πόλη B. Ο χρόνος που χρειάζεται ένας οδηγός για αυτή τη διαδρομή είναι σταθερός και ίσος με μία χρονική μονάδα αν επιλέξει τον παράδρομο (διαδρομή I) και ανάλογος της εισροής της κίνησης αν επιλέξει τη λεωφόρο (διαδρομή II).



Οι προαναφερθείσες ιδιότητες μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

- Δρόμος I (παράδρομος): $c_I(x) = 1$, όπου $c_I(\cdot)$ το κόστος ή χρόνος διέλευσης, x η εισροή κίνησης και 1 το σταθερό κόστος ή χρόνος.
- Δρόμος II (λεωφόρος): $c_{II}(x) = x$, όπου $x \in [0,1]$ είναι η συνολική εισροή κίνησης στο δρόμο II.

Ερώτημα: Ποια είναι η *βέλτιστη* κατανομή κίνησης;

Σχόλιο. Δεν υπάρχει ένας καθολικός ορισμός του τι σημαίνει ότι κάτι είναι *βέλτιστο* καθώς αυτό εξαρτάται από το πιο μέτρο/ποσότητα θέλουμε να "βελτιστοποιήσουμε", δηλαδή να ελαχιστοποιήσουμε. Στο παράδειγμά μας λ.χ. ένα τέτοιο μέτρο θα μπορούσε να είναι ο χρόνος που θα χρειαζόταν ο κάθε ένας οδηγός (ατομικά) για να φτάσει στον προορισμό του ενώ ένα άλλο μέτρο θα μπορούσε να είναι το συνολικό κόστος μετακίνησης στο υπό μελέτη σύστημα. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτά τα δύο κριτήρια μπορεί να δώσουν διαφορετικές βέλτιστες κατανομές κίνησης.

(α) Βελτιστοποίηση : κατάσταση που ελαχιστοποιεί το κόστος για κάθε οδηγό (ατομικά).

Η παιγνιοθεωρητική διατύπωση του δικτύου του Pigou είναι:

- Παίκτες $\mathcal{N} = [0,1]$
- Δράσεις $\mathcal{A} = \{I, II\}$
- Συναρτήσεις πληρωμής: Αν $\vec{x} = (x_I, x_{II})$ είναι η κατάσταση του πληθυσμού

  $[x_I, x_{II} \geqslant 0$ και $x_I + x_{II} = 1]$ έχουμε $u_I(\vec{x}) = -1$ και $u_{II}(\vec{x}) = -x_{II}$.

Παρατηρούμε ότι ένας παίκτης τύπου I έχει πληρωμή $u_I(\vec{x}) = -1 \leqslant -x_{II} = u_{II}(\vec{x})$, για κάθε δυνατή κατάσταση $\vec{x}$ και επομένως κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να επιλέξει το δρόμο (I) $\Rightarrow$ η ατομικά βέλτιστη κατανομή κίνησης είναι η $\vec{x}^* = \underset{\text{I II}}{(0,1)}$, δηλαδή να επιλέξουν όλοι οι οδηγοί τη λεωφόρο.

(β) <u>Βελτιστοποίηση:</u> κατάσταση που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος

Συνολικό Κόστος: $c(\vec{x}) = x_I \cdot c_I(\vec{x}) + x_{II} \cdot c_{II}(\vec{x})$.

Αν θέσουμε για ευκολία $x_I \leftarrow x$ και $x_{II} \leftarrow 1 - x$ θα έχουμε

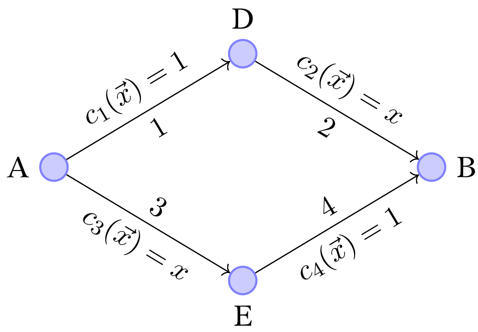
$$c(\vec{x}) = x \cdot 1 + (1-x) \cdot (1-x) = (1-x)^2 + x = x^2 - x + 1.$$

Το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται όταν $x = \dfrac{1}{2}$ και είναι ίσο με $c^* = \min\limits_{x \in [0,1]} c(x) = \dfrac{3}{4}$.

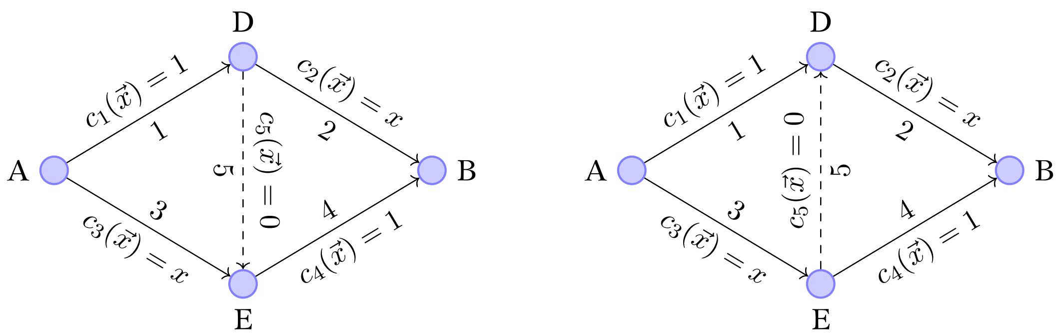
Σε σύγκριση με την ατομικά βέλτιστη κατάσταση όπου έχουμε $c(0) = 1$, βλέπουμε ότι υπάρχει μία διαφορά της τάξης $\dfrac{c(0)}{c^*} = \dfrac{4}{3}$. Αυτό ο λόγος, όπως θα δούμε στη συνέχεια, καλείται τίμημα της αναρχίας (price of anarchy ή PoA).

(B) Το παράδοξο του Braess (Homework)

Έχουμε ένα οδικό δίκτυο τεσσάρων κόμβων, των A, B, D, E, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Υποθέτουμε ότι ο δήμαρχος της πόλης σκέφτεται να προτείνει την κατασκευή μίας υπερλεωφόρου η οποία θα συνδέει τον κόμβο D με τον κόμβο E. Αυτή η υπερλεωφόρος πρόκειται να είναι μονής κατεύθυνσης, δηλαδή είτε με κατεύθυνση $D \to E$ είτε με κατεύθυνση $E \to D$ και στόχος είναι η αποσυμφόρηση της κίνησης στην πόλη. Τα παραπάνω σενάρια φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Ερωτήματα: Να υπολογιστούν:

(1) Η ατομικά και η συνολικά βέλτιστη κατανομή κίνησης στο δίκτυο χωρίς την υπερλεωφόρο.

(2) Η ατομικά και η συνολικά βέλτιστη κατανομή κίνησης στο δίκτυο με κατεύθυνση υπερλεωφόρου $E \to D$.

(3) Η ατομικά και η συνολικά βέλτιστη κατανομή κίνησης στο δίκτυο με κατεύθυνση υπερλεωφόρου $D \to E$.

(C) Golden Balls - Split or Steal

Υποθέτουμε ότι δύο παίκτες έχουν συγκεντρώσει το ποσό των 10000 ευρώ και πρέπει να αποφασίσουν πως θα το μοιραστούν. Ο κάθε παίκτης έχει μπροστά του δύο χρυσά σφαιρίδια όπου το ένα αναγράφει την λέξη "split" (μοιράζομαι) και το άλλο τη λέξη "steal" (κλέβω). Ο κάθε παίκτης επιλέγει ένα από τα δύο σφαιρίδια χωρίς ο άλλος να γνωρίζει το τι επέλεξε. Όταν και οι δύο παίκτες κάνουν την επιλογή τους, φανερώνουν το τι αναγράφει το σφαιρίδιο που επέλεξαν. Τώρα, αν και οι δύο επέλεξαν την επιλογή "split" μοιράζονται εξ ημισείας το ποσό των 10000 ευρώ, αν ένας παίκτης επέλεξε "steal" και ο άλλος επέλεξε "split" τότε ο παίκτης που επέλεξε "steal" παίρνει όλο το ποσό. Τέλος, αν και οι δύο παίκτες επιλέξουν "steal" χάνουν όλο το ποσό.

Το παραπάνω αποτελεί παράδειγμα πεπερασμένου παιγνίου που αναπαρίσταται παιγνιοθεωρητικά ως εξής:

- $\mathcal{N} = \{1, 2\}$
- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{\text{split}, \text{steal}\}$
- Συναρτήσεις Πληρωμής

$$u_I = \begin{cases} (\text{split}, \text{steal}) = 5000 \\ (\text{split}, \text{steal}) = 0 \\ (\text{steal}, \text{split}) = 10000 \\ (\text{steal}, \text{steal}) = 0 \end{cases} \quad \text{και } u_{II} = \begin{cases} (\text{split}, \text{steal}) = 5000 \\ (\text{split}, \text{steal}) = 10000 \\ (\text{steal}, \text{split}) = 0 \\ (\text{steal}, \text{steal}) = 0 \end{cases}$$

Μία πιο συμπαγής αναπαράσταση είναι το διπινακοπαίγνιο

Παίκτης 2 / Παίκτης 1	split	steal
split	$(5000, 5000)$	$(0, 10000)$
steal	$(10000, 0)$	$(0, 0)$

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε δεδομένη την δράση του Παίκτη 2 τότε ο Παίκτης 1 επιλέγοντας steal μεγιστοποιεί την πληρωμή του. Σε αυτή τη περίπτωση, όπως θα δούμε σε επόμενη διάλεξη, η επιλογή steal καλείται *Ασθενώς Βέλτιστη* για τον Παίκτη 1.

Ομοίως, παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε δεδομένη την δράση του Παίκτη 1 τότε ο Παίκτης 2 επιλέγοντας τη δράση steal μεγιστοποιεί την δική πληρωμή του, η επιλογή steal είναι *Ασθενώς Βέλτιστη* για τον Παίκτη 2.