ΜΑΘΗΜΑ 11

1 Ολοκληρωτικές Καμπύλες

1.1 Ορισμός. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Μια **ολοκληρωτική καμπύλη του** ξ με **αρχική συνθήκη** x_o, είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha : I \to M$, με

(1) $$\dot{\alpha} = \xi \circ \alpha$$

και

(2) $$\alpha(0) = x_o,$$

όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, με $0 \in I$.

Ο προηγούμενος ορισμός συνεπάγεται ότι ο περιορισμός $\xi|_{\alpha(I)}$ του ξ στην εικόνα $\alpha(I)$ συμπίπτει με το $\dot{\alpha}$. Ακόμη, η ισότητα $\dot{\alpha} = T\alpha \circ \frac{d}{dt}$ συνεπάγεται την μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
TI \arrow[r, "T\alpha"] & TM \\
I \arrow[u, "\frac{d}{dt}"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

δηλαδή, α είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, αν και μόνον αν $\frac{d}{dt}$ και ξ είναι α–συσχετισμένα.

Θα βρούμε τις τοπικές εκφράσεις των (1) και (2). Έστω (U, ϕ) ένα χάρτης επί του M με $x_o \in U$ και x_i, $i = 1, \ldots, m$ οι συντεταγμένες του. Επειδή α

είναι συνεχής, μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό διάστημα $J \subseteq I$ με $0 \in J$ και $\alpha(J) \subseteq U$. Θεωρούμε την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\alpha_i := x_i \circ \alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{3}$$

Τότε, για κάθε $t \in J$, έχουμε ότι $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}M$, άρα

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) = T_t\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right) &= \sum_{i=1}^{m}\left(T_t\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right)\right)(x_i)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left.\frac{d(x_i\circ\alpha)}{dt}\right|_t\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left.\frac{d\alpha_i}{dt}\right|_t\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i'(t)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο,

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha(t)) &= \sum_{i=1}^{m}\xi_{\alpha(t)}(x_i)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\xi_i(\alpha(t))\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha_i'(t) = \xi_i(\alpha(t)), \qquad i = 1,\ldots,m. \tag{4}$$

Μετασχηματίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\xi_i(\alpha(t)) = \xi_i\circ\alpha(t) &= \xi_i\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha(t) \\
&= \xi_i\circ\phi^{-1}(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_m(t)).
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\tilde{\xi}_i := \xi_i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ και αντικαθιστώντας στην (4), παίρνουμε

$$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_m(t)), \qquad i = 1,\ldots,m \tag{5}$$

που είναι ένα σύστημα από m συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$. Ακόμη, ικανοποιούν την αρχική συνθήκη

$$\alpha_i(0) = x_i(x_o), \qquad i = 1,\ldots,m.$$

Σύμφωνα με την γενική θεωρία των ΣΔΕ, το ανωτέρω σύστημα έχει (τοπικά) μια μοναδική λύση

$$\tilde{\alpha} \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) : J \longrightarrow \phi(U).$$

Θέτουμε

$$\alpha := \phi^{-1} \circ \tilde{\alpha} : J \longrightarrow U.$$

Τετριμμένα διαπιστώνουμε ότι α είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\alpha(0) = x_o$. Τα προηγούμενα συνοψίζονται στην επόμενη

1.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική m-διάστατη πολλαπλότητα και έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Για κάθε $x \in M$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in J$, και μια ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha : J \to M$ του ξ με $\alpha(0) = x$.*

Η Πρόταση 1.2 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ολοκληρωτικής καμπύλης που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη αρχική συνθήκη x, αλλά όχι την μοναδικότητα της, παρ' όλο που η αντίστοιχη λύση $\tilde{\alpha}$ επί ενός χάρτη είναι μοναδική. Όμως, το μονοσήμαντο των ολοκληρωτικών καμπυλών εξασφαλίζεται, σε Hausdorff πολλαπλότητες.

1.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα Hausdorff και έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Αν $x \in M$ και $\alpha : J_\alpha \to M$, $\beta : J_\beta \to M$ είναι ολοκληρωτική καμπύλες του ξ με $\alpha(0) = \beta(0) = x$, τότε α και β συμπίπτουν στην τομή $J_\alpha \cap J_\beta$ των πεδίων ορισμού τους.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος είναι Hausdorff, αν και μόνον αν η διαγώνιος Δ_M είναι κλειστό υποσύνολο του $M \times M$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$J := \{t \in J_\alpha \cap J_\beta \mid \alpha(t) = \beta(t)\}.$$

Προφανώς $0 \in J$ και $J \neq \emptyset$. Αποδεικνύουμε ότι J είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Πράγματι,

$$J = f^{-1}(\Delta_M)$$

όπου

$$f := (\alpha, \beta) : J \longrightarrow M \times M : f(t) = (\alpha(t), \beta(t)).$$

Επειδή η f είναι συνεχής και Δ_M είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $M \times M$, J είναι κλειστό στο $J_\alpha \cap J_\beta$ σαν αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχούς.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι J είναι επίσης ένα ανοιχτό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Πράγματι, έστω $s \in J$ και $\alpha(s) = \beta(s) =: y$. Θεωρούμε ένα χάρτη (U, ϕ) με $y \in U$. Σύμφωνα με τους συλλογισμούς προ της προηγούμενης Πρότασης 1.2, οι m–άδες $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \phi \circ \alpha$ και $(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \phi \circ \beta$ είναι λύσεις του ίδιου συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\gamma_i' = \tilde{\xi}_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_m), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

που ικανοποιούν την ίδια αρχική συνθήκη $\phi \circ \alpha(0) = \phi \circ \beta(0) = \phi(x)$. Επομένως, υπάρχουν ένας ανοιχτό διάστημα $J_o \subseteq J$ με $s \in J_o$, έτσι ώστε $\alpha|_{J_o} = \beta|_{J_o}$. Άρα, για κάθε $s \in J$, υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή J_o του s με $J_o \subseteq J$. Δηλαδή, J είναι ανοιχτό στο $J_\alpha \cap J_\beta$.

Επομένως, J είναι ένα μη κενό, ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Αλλά $J_\alpha \cap J_\beta$ είναι διάστημα, σαν τομή δύο διαστημάτων, που συνεπάγεται ότι $J = J_\alpha \cap J_\beta$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες προτάσεις μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω

1.4 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα Hausdorff, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $x \in M$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in I$ και ολοκληρωτική καμπύλη $\alpha : I \to M$ του ξ με $\alpha(0) = x$.*

Εξάλλου, αν $\beta : J \to M$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\beta(0) = x$, τότε $\alpha|_{I\cap J} = \beta|_{I\cap J}$. □

Σε όλα τα επόμενα, όλες οι πολλαπλότητες θεωρούνται Hausdorff.

1.5 Παραδείγματα. (Α) Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ με την συνήθη διαφορική δομή. Συμβολίζουμε με $(x, y) \equiv (pr_1, pr_2)$ τις συντεταγμένες του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$. Έστω το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο

$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6}$$

δηλ. $\xi_1 = x = pr_1$ και $\xi_2 = y = pr_2$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

$$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big), \qquad i = 1, 2. \tag{7}$$

Επειδή

$$\tilde{\xi}_1\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha_1(t)$$
$$\tilde{\xi}_2\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha_2(t),$$

οι ισότητες (7) γίνονται

$$\alpha_1'(t) = \alpha_1(t), \quad \alpha_2'(t) = \alpha_2(t).$$

Επομένως οι συντεταγμένες της $\tilde{\alpha}$ είναι οι

$$\alpha_1(t) = c_1 \exp t, \quad \alpha_2(t) = c_2 \exp t; \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές. Δηλ. οι ολοκληρωτικές καμπύλες της (6) έχουν την γενική μορφή

(8) $$\alpha(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = (c_1 \exp t, c_2 \exp t); \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\alpha_{(x,y)}$ την ολοκληρωτική καμπύλη με αρχική συνθήκη $\alpha_{(x,y)}(0) = (x, y)$, όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τυχαίο, τότε

$$\alpha_{(x,y)}(t) = (x \exp t, y \exp t),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(B) Πάλι στο $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε το

(9) $$\xi = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

δηλ. $\xi_1 = y = pr_2$ και $\xi_2 = -x = -pr_1$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

(10) $$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big), \qquad i = 1, 2.$$

Επειδή

$$\tilde{\xi}_1\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha_2(t)$$
$$\tilde{\xi}_2\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = \xi_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = -\alpha_1(t),$$

οι ισότητες (10) γίνονται

$$\alpha_1'(t) = \alpha_2(t), \quad \alpha_2'(t) = -\alpha_1(t).$$

Επομένως οι συντεταγμένες της $\tilde{\alpha}$ είναι οι

$$\alpha_1(t) = c_1 \sin(t + c_2), \quad \alpha_2(t) = c_1 \cos(t + c_2); \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές. Δηλ. οι ολοκληρωτικές καμπύλες της (6) έχουν την γενική μορφή

$$\alpha(t) = \mathbf{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = (c_1 \sin(t + c_2), c_1 \cos(t + c_2)); \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

(Γ) Έστω $(M, \mathcal{A})$ m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα (Hausdorff) και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathcal{X}(U)$. Δηλ. $\xi_1 = 1 =$ σταθ. και $\xi_i = 0$, για κάθε $i = 2, 3, \ldots, m$. Η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = x \in U$ δίνεται από την λύση του συστήματος

$$\alpha_i'(t) = \tilde{\xi}_i(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)), \qquad i = 1, \ldots, m$$

δηλ. του συστήματος

$$\begin{aligned} &\alpha_1'(t) = 1 \\ &\alpha_2'(t) = 0 \\ &\vdots \\ &\alpha_m'(t) = 0 \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} &\alpha_1(t) = t + c_1 \\ &\alpha_i(t) = c_i, \qquad i = 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Άρα

$$\tilde{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)) = (t + c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

και

$$\alpha(t) = \phi^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = \phi^{-1}(t + c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $\alpha(0) = x$, θα πρέπει

$$\phi \circ \alpha(0) = \tilde{\alpha}(0) = (c_1, c_2, \ldots, c_m),$$

δηλ. θα πρέπει

$$c_i = x_i(x) = pr_i \circ \phi(x), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

(Δ) Θεωρούμε το ολικό διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$. Πρόκειται για ειδική περίπτωση του (Γ). Το ξ έχει μια μοναδική συντεταγμένη $\xi_1 = 1$ και η ολοκληρωτική του καμπύλη δίνεται από την λύση της ΔΕ

$$\alpha_1'(t) = \tilde{\xi}_1(\alpha_1(t)) = \xi_1(\alpha_1(t)) = 1$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha_1(t) = t + c$$

και

$$\alpha(t) = \mathbf{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \tilde{\alpha}(t) = t + c.$$

Η αρχική συνθήκη $\alpha(0) = s$ μας δίνει $c = s$. Αν συμβολίσουμε με ℓ_s την *μεταφορά κατά* s, δηλ. την συνάρτηση $\ell_s(t) = t + s$, $t \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι η ℓ_s είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $\frac{d}{dt}$ με αρχική συνθήκη s, άρα

$$\dot{\ell}_s = \frac{d}{dt} \circ \ell_s. \tag{12}$$

1.6 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Τα ξ, η είναι f-συσχετισμένα.

(ii) Για κάθε ολοκληρωτική καμπύλη α του ξ, η $f \circ \alpha$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η.

Απόδειξη. ($i \Rightarrow ii$) Έστω ότι ξ, η είναι f-συσχετισμένα και $\alpha : I \to M$ με $\dot{\alpha} = \xi \circ \alpha$. Έστω και $\beta = f \circ \alpha$. Θα δείξουμε ότι $\dot{\beta} = \eta \circ \beta$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= T(f \circ \alpha) \circ \frac{d}{dt} = Tf \circ Ta \circ \frac{d}{dt} = Tf \circ \dot{\alpha} \\ &= Tf \circ \xi \circ \alpha = \eta \circ f \circ \alpha = \eta \circ \beta. \end{aligned}$$

($ii \Rightarrow i$) Έστω ότι η f μεταφέρει τις ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ σε ολοκληρωτικές καμπύλες του η, δηλ. ισχύει η (ii). Θα δείξουμε ότι, για κάθε $x \in M$, ισχύει $(Tf \circ \xi)(x) = (\eta \circ f)(x)$. Έστω $x \in M$. Τότε υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη α του ξ με $\alpha(0) = x$. Από την (ii), η σύνθεση $\beta = f \circ \alpha$ είναι ολοκληρωτική του η, άρα $\dot{\beta} = \eta \circ \beta$. Εφαρμόζοντας αυτή την ισότητα στο 0, έχουμε

$$\dot{\beta}(0) = (\eta \circ \beta)(0) = \eta(f(x))$$

άρα

$$\begin{aligned}(\eta\circ f)(x) = \dot{\beta}(0) = T(f\circ\alpha)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) &= Tf\circ T\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right)\\ &= Tf\circ\dot{\alpha}(0) = Tf\circ\xi\circ\alpha(0)\\ &= (Tf\circ\xi)(x)\end{aligned}\qquad\square$$

Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και α ολοκληρωτική του ξ. Τότε $\frac{d}{dt}$ και ξ είναι α-συσχετισμένα. Επειδή, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, η ℓ_s είναι ολοκληρωτική του $\frac{d}{dt}$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.6, η $\alpha\circ\ell_s$ είναι ολοκληρωτική του ξ. Δηλ. για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $t+s$ βρίσκεται μέσα στο π.ο. της α,

$$\begin{aligned}&\dot{\overbrace{\alpha\circ\ell_s}}(t) = (\xi\circ\alpha\circ\ell_s)(t) \;\Rightarrow\\ &Ta\circ T\ell_s\circ\frac{d}{dt}(t) = \xi(\alpha(t+s)) \;\Rightarrow\\ &T\alpha\left(\ell_s'(t)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{\ell_s(t)}\right) = \xi(\alpha(t+s)) \;\Rightarrow\\ &T\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t+s}\right) = \xi(\alpha(t+s)) \;\Rightarrow\\ &\dot{\alpha}(t+s) = \xi(\alpha(t+s)) = \xi\circ\alpha\circ\ell_s(t)\end{aligned}\tag{13}$$