ΜΑΘΗΜΑ 04

1 Διαφορίσιμες Απεικονίσεις

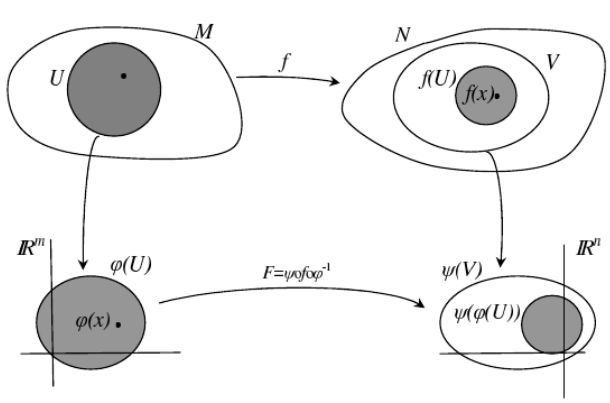
Θα ορίσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας για απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων, γενικεύοντας έτσι τη συνήθη διαφορισιμότητα απεικονίσεων μεταξύ ευκλείδειων χώρων. Η αντίστοιχη έννοια της παραγώγου (ή του διαφορικού) θα ορισθεί αργότερα, πάνω σε κατάλληλους γραμμικούς χώρους (τους εφαπτόμενους χώρους), που είναι προσαρτημένοι στα σημεία της πολλαπλότητας.

Σε όλη την παρούσα Παράγραφο, υποθέτουμε ότι $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες με αντίστοιχες διαστάσεις m και n.

1.1 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : M \to N$ ονομάζεται $\mathcal{C}^k$**–διαφορίσιμη στο** $x \in M$, αν υπάρχουν $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι ώστε: $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ και η απεικόνιση

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ (σύμφωνα με τη συνήθη έννοια της διαφορισιμότητας σε ευκλείδειους χώρους). Ονομάζουμε την απεικόνιση F **τοπική παράσταση** της f μέσω των χαρτών (U, ϕ) και (V, ψ).



Μια απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ ονομάζεται $\mathcal{C}^k$**–διαφορίσιμη**, αν είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, σε κάθε $x \in M$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^k(M, N)$ το σύνολο των $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ των πολλαπλοτήτων M και N.

Στα επόμενα, λέγοντας *διαφορίσιμη* απεικόνιση, εννοούμε $\mathcal{C}^\infty$–*διαφορίσιμη* απεικόνιση.

Είναι σημαντικό ότι η διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης δεν εξαρτάται από την επιλογή των χαρτών. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την

1.2 Πρόταση. *Έστω $f : M \to N$ διαφορίσιμη στο $x \in M$. Τότε, για κάθε ζεύγος από χάρτες $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ και $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{B}$ με $x \in U_1$, και $f(U_1) \subseteq V_1$, η τοπική παράσταση*

$$F_1 := \psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \to \psi_1(V_1)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi_1(x)$.

Απόδειξη. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο x, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες του ορισμού. Έστω $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ και $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{B}$ με $x \in U_1$ και $f(U_1) \subseteq V_1$. Θα δείξουμε ότι η τοπική παράσταση F_1 της f μέσω των (U_1, ϕ_1) και (V_1, ψ_1) είναι διαφορίσιμη στο $\phi_1(x)$. Αρκεί να βρούμε ένα ανοιχτό υποσύνολο A του $\phi_1(U_1)$, τέτοιο ώστε $\phi_1(x) \in A$ και $F_1|_A$ να είναι $\mathcal{C}^\infty$-απεικόνιση στο $\phi_1(x)$.

Λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U, ϕ), (U_1, ϕ_1) και (V, ψ), (V_1, ψ_1), έχουμε ότι οι

$$\begin{aligned} \phi \circ \phi_1^{-1} &: \phi_1(U_1 \cap U) \to \phi(U_1 \cap U), \\ \psi_1 \circ \psi^{-1} &: \psi(V \cap V_1) \to \psi(V \cap V_1) \end{aligned}$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$-απεικονίσεις (σε όλο το πεδίο ορισμού τους). Έστω $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ η τοπική παράσταση της f μέσω των (U, ϕ) και (V, ψ), που από την υπόθεση είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Επειδή το $\phi(U \cap U_1)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U)$, ο περιορισμός

$$F|_{\phi(U \cap U_1)} : \phi(U \cap U_1) \to \psi(V \cap V_1)$$

είναι διαφορίσιμος στο $\phi(x)$ (σαν περιορισμός μιας διαφορίσιμης απεικόνισης σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της). Επομένως, έχουμε το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\phi_1(U_1) \arrow[d, dashed, "F_1"'] & \supseteq & \phi_1(U \cap U_1) \arrow[r, "\phi \circ \phi_1^{-1}"] \arrow[d, "F_1|_{\phi_1(U \cap U_1)}"'] & \phi(U \cap U_1) \arrow[d, "F|_{\phi(U \cap U_1)}"] & \subseteq & \phi(U) \arrow[d, dashed, "F"] \\
\psi_1(V_1) & \supseteq & \psi_1(V \cap V_1) & \psi(V \cap V_1) \arrow[l, "\psi_1 \circ \psi^{-1}"] & \subseteq & \psi(V)
\end{tikzcd}$$

Άρα, βρίσκουμε ότι

$$F_1|_{\phi_1(U \cap U_1)} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ F|_{\phi(U \cap U_1)} \circ (\phi \circ \phi_1^{-1}),$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο σημείο $\phi_1(x)$, σαν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. Θέτοντας $A := \phi_1(U \cap U_1)$ παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

1.3 Πρόταση. *Μια απεικόνιση $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ που είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, είναι συνεχής στο x.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ και

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Τότε η F, αφού είναι διαφορίσιμη, είναι επίσης συνεχής στο $\phi(x)$. Επειδή οι ϕ και ψ είναι ομοιομορφισμοί, η

$$f|_U = \psi^{-1} \circ F \circ \phi : U \to V$$

είναι συνεχής στο x. Επομένως η f είναι συνεχής στο x. $\square$

1.4 Παρατηρήσεις. (1) Ας υποθέσουμε ότι η διαφορική δομή του M (αντίστ. του N) ορίζεται από τον μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}'$ (αντίστ. $\mathcal{B}'$), που περιέχει τον δοθέντα άτλαντα $\mathcal{A}$ (αντίστ. $\mathcal{B}$) του M (αντίστ. του N). Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, για να ελέγξουμε τη διαφορισιμότητα μιας $f : M \to N$ στο $x \in M$, αρκεί να ελέγξουμε τη διαφορισιμότητα της τοπικής παράστασης F, για δύο χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, με $x \in U$ και $f(U) \subseteq V$. Δηλαδή, αρκεί να ελέξουμε τη διαφορισιμότητα της F για τους δεδομένους χάρτες που ανήκουν στους $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.

Αυτό είναι ιδιαιτέρως χρήσιμο στην περίπτωση μιας πολλαπλότητας της οποίας η διαφορική δομή εισάγεται από συγκεκριμένους (βολικούς) άτλαντες. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να περιοριστούμε στον άτλαντα $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$, στην περίπτωση της σφαίρα S^2 μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους δύο χάρτες της στερεογραφικής προβολής, κλπ.

(2) Στην Ανάλυση, η διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης έχει απόλυτη σημασία. Στο πλαίσιο των πολλαπλοτήτων, μια απεικόνιση μπορεί να είναι ή να μην είναι διαφορίσιμη, ανάλογα με την επιλογή της διαφορικής δομής (: μέγιστος άτλαντας) που θεωρείται. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A}$ είναι ο συνήθης μέγιστος άτλαντας στο $\mathbb{R}$, ο επαγόμενος από τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, και $\mathcal{B}$ είναι ο μέγιστος άτλαντας ο επαγόμενος από τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}, \psi)$ (βλ. Άσκηση 8 από τις Ασκήσεις 01), τότε η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^{1/3}$$

δεν είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$, αλλά είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

1.5 Θεώρημα. *(Κανόνας της Αλυσίδας, μέρος I) Υποθέτουμε ότι οι $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ και $(Z, \mathcal{C})$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες και ότι οι απεικονίσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ είναι διαφορίσιμες στα $x \in X$ και $f(x) \in Y$, αντίστοιχα. Τότε η $g \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο x.*

Απόδειξη. Επειδή η g είναι διαφορίσιμη στο $f(x)$, υπάρχουν χάρτες $(W, \chi) \in \mathcal{C}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, τέτοιοι ώστε $f(x) \in V$, $g(V) \subseteq W$ και η τοπική παράσταση

$$\chi \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \chi(W)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\psi(f(x))$. Η συνέχεια της f στο x συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq X$, με $x \in A$ και $f(A) \subseteq V$. Επειδή τα πεδία ορισμού των χαρτών ενός μέγιστου άτλαντα σχηματίζουν μια βάση για την κανονική τοπολογία, υπάρχει ένας χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \subseteq A$. Τότε $f(U) \subseteq V$ και η αντίστοιχη τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$. Θεωρούμε τους χάρτες (U, ϕ) του X και (W, χ) του Z. Τότε $x \in U$, $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, και η τοπική παράσταση

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) : \phi(U) \to \chi(W)$$

είναι διαφορίσιμη σαν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. □

Το Θεώρημα 1.5 είναι μέρος του κανόνα της αλυσίδας για απεικονίσεις που ορίζονται σε πολλαπλότητες. Η πλήρης μορφή του κανόνα της αλυσίδας θα δοθεί αργότερα, όταν θα αποδείξουμε ένα τύπο για το διαφορικό της σύνθεσης.

2 Παραδείγματα

Οι επόμενες προτάσεις παρέχουν μερικά παραδείγματα διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Αν οι ευκλείδειοι χώροι θεωρούνται σαν πολλαπλότητες με την συνήθη διαφορική δομή, τότε οι διαφορίσιμες απεικονίσεις με την έννοια του Ορισμού 1.1 συμπίπτουν με τις συνήθεις διαφορίσιμες απεικονίσεις του Απειροστικού Λογισμού:

2.1 Πρόταση. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f : A \to \mathbb{R}^m$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλοτήτων $(A, \{(A, id_A)\}')$ και $(\mathbb{R}^n, \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}')$, αν και μόνον αν η f είναι διαφορίσιμη σαν (τοπικά ορισμένη) απεικόνιση μεταξύ ευκλείδειων χώρων.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι χάρτες (A, id_A) και $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ είναι κατάλληλοι για να θεωρήσουμε τοπική παράσταση της f σε κάθε σημείο $x \in A$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων, αν και μόνον αν η τοπική παράσταση

$$id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ (id_A)^{-1} : id_A(A) \to id_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n),$$

δηλαδή η απεικόνιση

$$f : A \to \mathbb{R}^n$$

είναι διαφορίσιμη, με τη συνήθη έννοια. □

2.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Τότε η απεικόνιση $id_M \colon M \to M$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Παρατηρούμε ότι $id_M(U) = U \subseteq U$, δηλαδή, υπάρχει τοπική παράσταση της id_M ως προς τους χάρτες (U, ϕ) και (U, ϕ)

$$\phi \circ id_M \circ \phi^{-1} = id_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

που είναι διαφορίσιμη. □

2.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα και $(A, \mathcal{A}|_A)$ ανοιχτή υποπολλαπλότητά της. Τότε η κανονική εμφύτευση $i \colon A \to M$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $x \in A$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}|_A \subseteq \mathcal{A}$ με $x \in U$. Προφανώς, η τοπική παράσταση

$$\phi \circ i \circ \phi^{-1} = id_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

της i ως προς τους χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}|_A$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ υπάρχει και είναι διαφορίσιμη. □

2.4 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ εφοδιασμένο με τον διαφορικό άτλαντα $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})'$. Τότε οι κανονικές προβολές $p_M \colon M \times N \to M$ και $p_N \colon M \times N \to N$ είναι διαφορίσιμες.*

Απόδειξη. Έστω $(x, y) \in M \times N$ και έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $y \in V$. Θεωρούμε το ζεύγος των χαρτών $(U \times V, \phi \times \psi)$ επί $M \times N$ και (U, ϕ) επί του M. Τότε $(x, y) \in U \times V$, $p_M(U \times V) = U$ και η τοπική παράσταση της p_M ως προς τους ανωτέρω χάρτες είναι η κανονική προβολή

$$\begin{gathered} \phi \circ p_M \circ (\phi \times \psi)^{-1} = P_{\phi(U)} : \phi(U) \times \psi(V) \longrightarrow \phi(U) : \\ (h, k) \longmapsto h, \end{gathered}$$

που είναι διαφορίσιμη. Ανάλογα δείχνουμε ότι η p_N είναι επίσης διαφορίσιμη. □

2.5 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ εφοδιασμένο με τον διαφορικό άτλαντα $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})'$. Έστω και ένα σταθεροποιημένο σημείο $(x_o, y_o) \in M \times N$. Τότε οι κανονικές εμφυτεύσεις*

$$\begin{gathered} i_M : M \longrightarrow M \times N : i_M(x) = (x, y_o) \\ i_N : N \longrightarrow M \times N : i_N(y) = (x_0, y) \end{gathered}$$

είναι διαφορίσιμες.

Απόδειξη. Δείχνουμε την διαφορισιμότητα της i_M: Έστω $x \in M$. Υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $y_o \in V$. Θεωρούμε τους χάρτες (U, ϕ) και $(U \times V, \phi \times \psi)$. Τότε $x \in U$, $i_M(U) = U \times \{y_o\} \subseteq U \times V$ και η τοπική παράσταση της i_M μέσω των ανωτέρω χαρτών

$$(\phi \times \psi) \circ i_M \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \times \psi(V)$$
$$(\phi \times \psi) \circ i_M \circ \phi^{-1}(h) = (\phi \times \psi)(\phi^{-1}(h), y_o) = (h, \psi(y_o)), \quad \forall\, h \in \phi(U)$$

είναι διαφορίσιμη. □

Θα μελετήσουμε τώρα δύο ειδικές περιπτώσεις που εμφανίζονται συχνά στο πλαίσιό μας. Πρώτα θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητα με τη συνήθη διαφορική δομή. Αν θεωρήσουμε τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ στο $\mathbb{R}$, τότε κάθε χάρτης (U, ϕ) επί του M έχει την ιδιότητα $f(U) \subseteq \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε χάρτη (U, ϕ) επί του M με $x \in U$, η τοπική παράσταση

$$f \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

ορίζεται. Παίρνουμε λοιπόν την

2.6 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια πραγματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, αν υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τέτοιος ώστε η (1) να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f : (M, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}\}$$

όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων επί του M είναι μια μεταθετική, προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα.

Η δεύτερη περίπτωση είναι, πιο γενικά, μια διανυσματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}^n$. Αν $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι οι συνήθεις προβολές, ορίζονται οι απεικονίσεις

$$f_i := pr_i \circ f : M \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

η διαφορισιμότητα των οποίων περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση. Τότε, παίρνουμε

2.7 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια διανυσματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, αν και μόνον αν όλες οι πραγματικές απεικονίσεις (2) είναι διαφορίσιμες.*

Απόδειξη. Αν f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε κάθε f_i είναι διαφορίσιμη στο x, σαν σύνθεση της f με τη γραμμική απεικόνιση pr_i.

Αντίστροφα, έστω f_i διαφορίσιμη στο x, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Έστω και (U, ϕ) ένας χάρτης επί του M με $x \in U$. Θεωρούμε την τοπική παράσταση

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, αν και μόνον αν οι συνιστώσες της

$$pr_i \circ (f \circ \phi^{-1}) = f_i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμες στο $\phi(x)$. Το τελευταίο ισχύει, αφού οι απεικονίσεις $pr_i \circ (f \circ \phi^{-1})$ είναι οι τοπικές παραστάσεις της f_i μέσω των χαρτών (U, ϕ) και $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$. □

3 Αμφιδιαφορίσεις

3.1 Ορισμός. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N$ μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων ονομάζεται **αμφιδιαφόριση**, αν είναι αμφιμονοσήμαντη και η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ είναι διαφορίσιμη.

3.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Τότε $\phi : U \to \phi(U)$ είναι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ των ανοιχτών υποπολλαπλοτήτων U και $\phi(U)$ των M και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε U και $\phi(U)$ εφοδιασμένα με τους ολικούς χάρτες (U, ϕ) και $(\phi(U), \mathrm{id}_{\phi(U)})$. Οι τοπικές παραστάσεις των ϕ και ϕ^{-1} συμπίπτουν με την αμφιδιαφόριση

$$\mathrm{id}_{\phi(U)} = \mathrm{id}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \phi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 2.5 και 3.2 έχουμε

3.3 Πόρισμα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Τότε οι συντεταγμένες $x_i = pr_i \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες.*

Το αντίστροφο της Πρόταση 3.2 είναι επίσης αληθινό:

3.4 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και έστω U και A ανοιχτά υποσύνολα των M και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα. Αν $\phi : U \to A$ είναι μια αμφιδιαφόριση (ως προς την δομή ανοιχτής υποπολλαπλότητας), τότε (U, ϕ) είναι ένας χάρτης του $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Επειδή η ϕ είναι αμφιμονοσήμαντη και $A = \phi(U)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, (U, ϕ) είναι ένας m-διάστατος χάρτης επί του M. Για να αποδείξουμε ότι $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι (U, ϕ) είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστός με κάθε χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.

Έστω $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Αν $U \cap V = \emptyset$, οι χάρτες είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστοί. Αν $U \cap V \neq \emptyset$, τότε $U \cap V$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο των U και V, έτσι οι ομοιομορφισμοί ϕ και ψ το στέλνουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ των $\phi(U)$ και $\psi(V)$, επομένως του $\mathbb{R}^m$. Από την άλλη μεριά, αφού ϕ και ψ είναι αμφιδιαφορίσεις, το ίδιο είναι και οι περιορισμοί

$$\phi|_{U\cap V} : U \cap V \longrightarrow \phi(U \cap V) \quad \text{και} \quad \psi|_{U\cap V} : U \cap V \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

στο ανοιχτό υποσύνολο $U \cap V$ των πεδίων ορισμού τους. Σαν αποτέλεσμα, η σύνθεση

$$\psi \circ \phi^{-1} \equiv \psi|_{U\cap V} \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

είναι αμφιδιαφόριση, που αποδεικνύει τη $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστότητα των (U, ϕ) και (V, ψ) και ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Στο επόμενο θεώρημα, δείχνουμε ότι η σύμπτωση δύο διαφορικών δομών επί ενός συνόλου M είναι ισοδύναμη με την αμφιδιαφορισιμότητα της ταυτοτικής απεικόνισης id_M ως προς αυτές τις δύο δομές. Πιό συγκεκριμένα, έχουμε

3.5 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο μέγιστοι διαφορικοί άτλαντες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, επί του συνόλου M. Τότε οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Οι διαφορικές δομές συμπίπτουν, δηλαδή, $m = n$ και $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(ii) Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_M : M \to M$ είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (i) $\Rightarrow$ (ii) είναι άμεση· αρκεί να ελέγξουμε την διαφορισιμότητα της id_M ως προς τους (U, ϕ) και (U, ϕ), για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Αποδεικνύουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (i): Θεωρούμε δύο τυχαίους χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $U \cap V \neq \emptyset$ και θα αποδείξτε ότι είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστοί. Επειδή $\mathrm{id}_M : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B})$ είναι μια αμφιδιαφόριση, είναι επίσης ομοιομορφισμός, έτσι στέλνει τα ανοιχτά σύνολα του $\tau_{\mathcal{A}}$ σε ανοιχτά σύνολα του $\tau_{\mathcal{B}}$ και αντιστρόφως. Δηλαδή, $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{B}} =: \tau$. Σαν αποτέλεσμα, $U \cap V \in \tau$, επομένως οι ομοιομορφισμοί ϕ και ψ τα στέλνουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ των $\phi(U)$ και $\psi(V)$, αντίστοιχα, που είναι ανοιχτά υποσύνολα ττων $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα. Επομένως, $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα των $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα.

Από την άλλη μεριά, $(U \cap V, \phi|_{U\cap V}) \in \mathcal{A}$ και $(U \cap V, \psi|_{U\cap V}) \in \mathcal{B}$ (βλ. Λήμμα 1.4 του Μαθήματος 03) και $\mathrm{id}_M(U \cap V) \subseteq U \cap V$, έτσι μπορούμε να θεωρούμε την τοπική παράσταση της id_M ως προς αυτούς τους δύο χάρτες

$$\psi|_{U\cap V} \circ \mathrm{id}_M \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$

που είναι αμφιδιαφόριση, διότι id_M είναι αμφιδιαφόριση. Επειδή

$$\psi|_{U\cap V} \circ \mathrm{id}_M \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1} = \psi \circ \phi^{-1},$$

παίρνουμε ότι (U,ϕ) και (V,ψ) είναι $\mathcal{C}^\infty$–συμβιβαστοί. Έτσι, κάθε χάρτης του $\mathcal{A}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$–συμβιβαστός με κάθε χάρτη στον $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}$ είναι μέγιστος. Έπεται ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Αλλά $\mathcal{A}$ είναι επίσης μέγιστος, επομένως $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Τότε προφανώς επίσης $m = n$. □

3.6 Παρατήρηση. Το Θεώρημα 3.5 επίσης ισχύει για τοπολογικές πολλαπλότητες. Σε αυτή την περίπτωση, η id_M είναι απλά ένας ομοιομορφισμός. Η απόδειξη δουλεύει όπως στην ανωτέρω διαφορική περίπτωση, αν οι ομοιομορφισμοί πάρουν την θέση των αμφιδιαφορίσεων.

4 Τοπική Διαφορισιμότητα

4.1 Ορισμός. Έστω $(M,\mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα και $x \in M$. Μια **τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του** M **στο** x είναι μια πραγματική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A είναι μια ανοιχτή περιοχή του x στο M και f είναι διαφορίσιμη στο x ως προς τη δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας. Ανάλογα, μια **τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του** M είναι μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A είναι μια ανοιχτή υποπολλαπλότητα του M.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$ το σύνολο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτάσεων επί του M στο x. Σημειώνουμε ότι $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M,\mathbb{R})$ συνεπάγεται ότι $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις στα ανοιχτά σύνολα $A, B \subseteq M$ με $x \in A \cap B$, αλλά, γενικά, $A \neq B$.

4.2 Πρόταση. *Έστω $(M,\mathcal{A})$ και $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m, n, αντίστοιχα, και έστω $f : M \to N$ μια απεικόνιση. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Η απεικόνιση f είναι διαφορίσιμη.

(ii) Η απεικόνιση f είναι συνεχής και, για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση g επί του N, η απεικόνιση $g \circ f|_{f^{-1}(A)}$, όπου A είναι το πεδίο ορισμού της g, είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε είναι συνεχής, λόγω της Πρότασης 1.3. Ακόμη, αν $g : A \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί της N, όπου $A \subseteq N$ ανοιχτό, τότε $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό και $f|_{f^{-1}(A)}$ είναι διαφορίσιμη σαν περιορισμός μιας διαφορίσιμης απεικόνισης σε ανοιχτό σύνολο. Επομένως, η $g \circ f|_{f^{-1}(A)}$ είναι σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η **ii)** ισχύει. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σε ένα τυχαίο σημείο $x \in M$. Έστω $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ με $f(x) \in V$. Επειδή η f

είναι συνεχής, $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x, επομένως υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Τότε $f(U) \subseteq V$, δηλαδή, η τοπική παράσταση $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ της f μέσω (U, ϕ) και (V, ψ) ορίζεται. Αποδεικνύουμε ότι η $F : \phi(U) \to \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$: Η τελευταία, επειδή είναι διανυσματική απεικόνιση, είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν οι συνιστώσες $pr_j \circ F : \phi(U) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες, για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Επειδή $\psi : V \to \psi(V)$ είναι αμφιδιαφόριση με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, οι συνιστώσες $\psi_j := pr_j \circ \psi$ είναι διαφορίσιμες, για κάθε $j = 1, \ldots, n$, δηλαδή, κάθε $\psi_j : V \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του N. Από την υπόθεση, κάθε σύνθεση $\psi_j \circ f : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, που, με τη σειρά του, συνεπάγεται ότι η τοπική της παράσταση $\psi_j \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη. Το αποτέλεσμα τώρα ακολουθεί, από το γεγονός ότι $\psi_j \circ f \circ \phi^{-1}\phi(U) = pr_j \circ F$. $\square$

4.3 Σχόλιο. Το σύνολο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων επί μιας πολλαπλότητας καθορίζει τη δομή πολλαπλότητας. Δηλαδή, αν αυτό το σύνολο είναι γνωστό, τότε ο μέγιστος άτλαντας είναι γνωστός. Για αυτό το λόγο, το σύνολο των τοπικά οριζόμενων διαφορίσιμων συναρτήσεων χρησιμοποιείται αντί ενός άτλαντα, για ένα ισοδύναμο ορισμό της πολλαπλότητας. Η απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας είναι πέραν του σκοπού αυτών των σημειώσεων.