ΜΑΘΗΜΑ 06

1 Σημειακό Διαφορικό

1.1 Ορισμός. Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων και $x \in M$. Ονομάζουμε **διαφορικό της** f **στο** x ή **παράγωγο της** f **στο** x την απεικόνιση

$$T_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N : [(\alpha, x)] \mapsto [(f \circ \alpha, f(x))].$$

1.2 Λήμμα. *Το διαφορικό $T_x f$ μιας διαφορίσιμης απεικόνισης f σε ένα σημείο x είναι καλά ορισμένο.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι $[(f \circ \alpha, f(x))] \in T_{f(x)} N$, αφού $f \circ \alpha$ είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη στην N που περνά από το $f(\alpha(0)) = f(x)$, για κάθε $[(\alpha, x)] \in T_x M$.

Αποδεικνύουμε ότι $[(f \circ \alpha, f(x))]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης α: Αν β είναι άλλη διαφορίσιμη καμπύλη στην κλάση $[(\alpha, x)]$, τότε $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, ή, ισοδύναμα,

$$D(\phi \circ \alpha)(0) = D(\phi \circ \beta)(0),$$

για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U$. Επειδή f είναι διαφορίσιμη, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$, $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε η αντίστοιχη τοπική παράσταση $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη. Έτσι, για τις διαφορίσιμες καμπύλες $f \circ \alpha$ και $f \circ \beta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
D(\psi \circ (f \circ \alpha))(0) &= D((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha))(0) \\
&= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \alpha)(0)) \circ D(\phi \circ \alpha)(0) \\
&= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \beta)(0)) \circ D(\phi \circ \beta)(0) \\
&= D((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \beta))(0) \\
&= D(\psi \circ (f \circ \beta))(0),
\end{aligned}$$

δηλαδή, $[(f \circ \alpha, f(x))] = [(f \circ \beta, f(x))]$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Θα δείξουμε τώρα ότι το διαφορικό $T_x f$ είναι γραμμική απεικόνιση. Πρώτα χρειαζόμαστε το

1.3 Λήμμα. *Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ διαφορίσιμη στο $x \in M$. Αν (U, ϕ), (V, ψ) είναι χάρτες επί των M, N, αντίστοιχα, με $x \in U$ και $f(U) \subseteq V$, και $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f, τότε*

$$\bar{\psi} \circ T_x f = DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi}, \tag{1}$$

δηλαδή, το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_x M \arrow[r, "T_x f"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & T_{f(x)} N \arrow[d, "\bar{\psi}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "DF(\phi(x))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Λόγω της διαφορισιμότητας της f στο x, η τοπική παράσταση F είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, έτσι το σύνηθες διαφορικό $DF(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ορίζεται. Θεωρούμε τους γραμμικούς ισομορφισμούς $\bar{\phi} : T_x M \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{\psi} : T_{f(x)} N \to \mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε ότι η (1) ισχύει: Έστω $[(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε

$$\begin{aligned} (DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi})([(\alpha, x)]) &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha(0)))](\bar{\phi}([(\alpha, x)])) \\ &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha(0)))]([D(\phi \circ \alpha)(0)](1)) \\ &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ (f \circ \alpha))(0)](1) \\ &= \bar{\psi}([(f \circ \alpha, f(x))]) = (\bar{\psi} \circ T_x f)([(\alpha, x)]) \end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. □

1.4 Πρόταση. *Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ διαφορίσιμη στο $x \in M$. Τότε το διαφορικό $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ της f στο x είναι μια γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Λόγω του (1),

$$T_x f = \bar{\psi}^{-1} \circ DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi},$$

δηλαδή, $T_x f$ είναι σύνθεση τριών γραμμικών απεικονίσεων. □

1.5 Παραδείγματα. (1) Αν $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ είναι σταθερή, τότε η f είναι διαφορίσιμη και $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$. Πράγματι, έστω ένα $x \in M$ και έστω $y_o \in N$ η σταθερή τιμή της f. Υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $y_o \in V$. Έστω και ένας τυχαίος χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε $f(U) = \{y_o\} \subseteq V$ και οι ανωτέρω χάρτες δίνουν τοπική παράσταση της f

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

που είναι σταθερή και ίση με $\psi(y_o)$, άρα διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα και η f είναι διαφορίσιμη, και για κάθε $u \in T_x M$, ισχύει

$$T_x f(u) = \bar{\psi}^{-1} \circ DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(u) = \bar{\psi}^{-1}(0) = 0,$$

αφού $DF(h) = 0$, για κάθε $h \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$, σαν διαφορικό σταθερής και $\bar{\psi}^{-1}(0) = 0$, επειδή η $\bar{\psi}^{-1}$ είναι γραμμική.

(2) Εφαρμόζοντας τον ορισμό του σημειακού διαφορικού στην ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_M : M \to M$, παίρνουμε για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$, ότι

$$T_x \mathrm{id}_M(u) = [(\mathrm{id}_M \circ \alpha, \mathrm{id}_M(x))] = [(\alpha, x)] = u,$$

δηλ.

(2) $$T_x \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_x M},$$

για κάθε $x \in M$.

(3) Υποθέτουμε ότι $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Η απεικόνιση $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, αφού είναι διαφορίσιμη, έχει ένα διαφορικό $T_x \phi : T_x M \to T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ στο $\mathbb{R}^m$. Τότε $T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^m$ είναι ισόμορφοι, μέσω της $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}$. Υπολογίζουμε την σύνθεση $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x \phi$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x \phi(u) &= \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}([(\phi \circ \alpha, \phi(x))]) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \alpha)'(0) \\ &= \bar{\phi}(u), \end{aligned}$$

δηλ.

(3) $$\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x \phi = \bar{\phi}.$$

και (ισοδύναμα) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "T_x\phi"] \arrow[dr, "\bar{\phi}"'] & T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m \arrow[d, "\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Βλέπουμε συχνά στην βιβλιογραφία την ισότητα (3) γραμμένη σαν

$$T_x\phi \equiv \bar{\phi}$$

με τον ισομορφισμό $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}}$ να παραλείπεται.

1.6 Θεώρημα. *(Κανόνας της Αλυσίδας, μέρος II) Αν $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ και $g : (N, \mathcal{B}) \to (P, \mathcal{C})$ είναι διαφορίσιμες στο $x \in M$ και $f(x) \in N$, αντίστοιχα, τότε*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f. \tag{4}$$

Απόδειξη. Έστω $[(\alpha, x)] \in T_xM$. Τότε

$$\begin{aligned}(T_x(g \circ f))([(\alpha, x)]) &= [((g \circ f) \circ \alpha, (g \circ f)(x))] \\ &= [(g \circ (f \circ \alpha), g(f(x)))] \\ &= T_{f(x)}g([(f \circ \alpha, f(x))]) \\ &= T_{f(x)}g(T_x f([(\alpha, x)])) \\ &= (T_{f(x)}g \circ T_x f)([(\alpha, x)])\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Αποδεικνύουμε τώρα το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

1.7 Θεώρημα. *(Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν το διαφορικό της f σε ένα σημείο $x_o \in M$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε η f είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση στο x_o· δηλαδή, υπάρχουν ανοιχτά υποσύνολα $U_o \subseteq M$ και $V_o \subseteq N$, τέτοια ώστε $x_o \in U_o$, $f(U_o) = V_o$ και $f|_{U_o} : U_o \to V_o$ να είναι μια αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη. Ας υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις των M και N είναι m και n, αντίστοιχα. Επειδή f είναι διαφορίσιμη στο x_o, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, τέτοιοι ώστε $x_o \in U_o$, $f(U_o) \subseteq V_o$ και η τοπική παράσταση

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x_o)$, δηλαδή, υπάρχει το γραμμικό διαφορικό

$$DF(\phi(x_o)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Λόγω της ισότητας (1), παίρνουμε ότι

$$DF(\phi(x_o)) = \bar{\psi} \circ T_{x_o} f \circ \bar{\phi}^{-1},$$

που μας δίνει ότι $DF(\phi(x_o))$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, σαν σύνθεση τριών γραμμικών ισομορφισμών, και, κατ' ανάγκη, $m = n$. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης του Απειροστικού Λογισμού, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A \subseteq \phi(U)$ και $B \subseteq \psi(V)$ με $\phi(x_o) \in A$, $F(A) = B$ και $F|_A : A \to B$ αμφιδιαφόριση. Θέτουμε $U_o := \phi^{-1}(A) \subseteq U$ και $V_o := \psi^{-1}(B) \subseteq V$. Τότε U_o και V_o είναι ανοιχτά υποσύνολα των U και V, σαν αντίστροφες εικόνες των ανοιχτών συνόλων A και B μέσω των συνεχών απεικονίσεων ϕ και ψ, αντίστοιχα, $x_o \in U_o$,

$$\begin{aligned} f(U_o) &= \psi^{-1} \circ F \circ \phi(U_o) \\ &= \psi^{-1} \circ F(A) \\ &= \psi^{-1}(B) = V_o \end{aligned}$$

και $f|_{U_o} = \psi^{-1}|_B \circ F|_A \circ \phi|_{U_o}$ είναι αμφιδιαφόριση σαν σύνθεση τριών αμφιδιαφορίσεων. □

1.8 Πόρισμα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν f είναι αμφιμονοσήμαντη και $T_x f$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, για κάθε $x \in M$, τότε η f είναι αμφιδιαφόριση.*

2 Υπόχωροι και Χώροι-γινόμενα ...

Δύο χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν εφαπτόμενους χώρους δίνονται στις επόμενες δύο προτάσεις.

2.1 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και έστω $A \subseteq M$ ανοιχτό και $x \in A$. Αν A θεωρείται σαν ανοιχτή υποπολλαπλότητα του M, τότε υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\Phi : T_xA \longrightarrow T_xM.$$

Σημείωση. Γνωρίζουμε ότι οι T_xA και T_xM είναι m-διάστατοι διανυσματικοί χώροι, άρα είναι ισόμορφοι μεταξύ τους (και με το $\mathbb{R}^m$). Για δύο m-διάστατους διανυσματικούς χώρους X και Y μπορούμε να φτιάξουμε ένα ισομορφισμό f μεταξύ τους, θεωρώντας μια βάση $\{x_1, \ldots, x_m\}$ του X, μια βάση $\{y_1, \ldots, y_m\}$ του Y, θέτοντας $f(x_i) = y_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, και επεκτείνοντας γραμμικά. Ο ισομορφισμός που βρίσκουμε αλλάζει αν αλλάξουμε τις χρησιμοποιούμενες βάσεις. Η λέξη «φυσικός» στην ανωτέρω εκφώνηση σημαίνει οτι υπάρχει ισομορφισμός που ορίζεται χωρίς την χρήση βάσεων, άρα χωρίς να εξαρτάται από θεωρούμενους χάρτες.

Απόδειξη. Αν $\alpha\colon I \to A$ είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη στο A, είναι επίσης μια διαφορίσιμη καμπύλη στο M. Ας συμβολίσουμε με $[(\alpha, x)]_A$ και $[(\alpha, x)]_M$ τις κλάσεις ισοδυναμίας της α στα A και M, αντίστοιχα. Θεωρώντας το διαφορικό της φυσικής εμφύτευσης $i_A\colon A \to M$ στο x, παίρνουμε

$$T_xi_A : T_xA \longrightarrow T_xM : [(\alpha, x)]_A \longmapsto [(i_A \circ \alpha, i_A(x))]_M = [(\alpha, x)]_M.$$

Ακόμη, έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $U \subseteq A$ και $x \in U$. Τότε $(U, \phi) \in \mathcal{A}|_A$. Συμβολίζουμε με $\bar{\phi}_M\colon T_xM \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{\phi}_A\colon T_xA \to \mathbb{R}^m$ τους αντίστοιχους ισομορφισμούς. Προφανώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_xA \arrow[rr, "T_xi"] \arrow[dr, "\bar{\phi}_A"'] & & T_xM \arrow[dl, "\bar{\phi}_M"] \\
& \mathbb{R}^m &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό: Για κάθε $[(\alpha, x)]_A \in T_xA$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_M \circ T_xi_A([(\alpha, x)]_A) &= \bar{\phi}_M([(i_A \circ \alpha, i_A(x)]) = \bar{\phi}_M([(\alpha, x)]_M) \\
&= (\phi \circ \alpha)'(0) = \bar{\phi}_A([(\alpha, x)]_A).
\end{aligned}$$

Έτσι, το ζητούμενος ισομορφισμός είναι

$$\Phi := T_xi = \bar{\phi}_M^{-1} \circ \bar{\phi}_A.$$

□

2.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων $m, n \in \mathbb{N}$, αντίστοιχα. Για κάθε $x \in M$ και $y \in N$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\Phi : T_{(x,y)}(M \times N) \longrightarrow T_xM \times T_yN.$$

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $y \in V$. Θεωρούμε τον χάρτη $(U \times V, \phi \times \psi) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ και τους ισομορφισμούς $\bar{\phi} : T_xM \to \mathbb{R}^m$, $\bar{\psi} : T_yN \to \mathbb{R}^n$ και $\overline{\phi \times \psi} : T_{(x,y)}(M \times N) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Ακόμη, θεωρούμε τις (διαφορίσιμες) προβολές $p_M : M \times N \to M$ και $p_N : M \times N \to N$, και τα διαφορικά τους

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}p_M &: T_{(x,y)}(M \times N) \to T_xM \\ T_{(x,y)}p_N &: T_{(x,y)}(M \times N) \to T_yN. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha : I \to M \times N$ που περνά από το (x, y), συνθέτοντας με τις προβολές παίρνουμε δύο διαφορίσιμες καμπύλες $\alpha_M = p_M \circ \alpha : I \to M$ και $\alpha_N = p_N \circ \alpha : I \to N$. Θεωρώντας το αντίστοιχο εφαπτόμενο διάνυσμα $[(\alpha, (x, y)]$, έχουμε

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}p_M([(\alpha, (x, y))]) &= [(p_M \circ \alpha, p_M(x, y))] = [(\alpha_M, x)], \\ T_{(x,y)}p_N([(\alpha, (x, y))]) &= [(p_N \circ \alpha, p_N(x, y))] = [(\alpha_N, y)]. \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε ότι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} T_{(x,y)}(M \times N) \arrow[rr, "{(T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N)}"] \arrow[dr, "\overline{\phi \times \psi}"'] & & T_xM \times T_yN \arrow[dl, "\bar{\phi} \times \bar{\psi}"] \\ & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

Πράγματι, για κάθε $[(\alpha, (x, y))] \in T_{(x,y)}(M \times N)$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\bar{\phi} \times \bar{\psi}) \circ (T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N)([(\alpha, (x, y))]) &= (\bar{\phi} \times \bar{\psi})([(\alpha_M, x)], [(\alpha_N, y)]) \\ &= (\bar{\phi}([(\alpha_M, x)]), \bar{\psi}([(\alpha_N, y)]) \\ &= ((\phi \circ \alpha_M)'(0), (\psi \circ \alpha_N)'(0)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \overline{\phi \times \psi}([(\alpha, (x, y))]) &= ((\phi \times \psi) \circ \alpha)'(0) \\ &= ((\phi \times \psi) \circ (\alpha_M, \alpha_N))'(0) \\ &= ((\phi \circ \alpha_M)'(0), (\psi \circ \alpha_N)'(0)) \end{aligned}$$

Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος προκύπτει ότι το ζεύγος

$$(T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N) = (\bar{\psi}^{-1} \times \bar{\phi}^{-1}) \circ \phi \mathbin{\bar{\times}} \psi$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός σαν σύνθεση δύο τέτοιων, άρα ο ζητούμενος ισομορφισμός Φ είναι ο

(5) $$\Phi := (T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N) : T_{(x,y)}(M \times N) \longrightarrow T_xM \times T_yN. \qquad \square$$

Με τις υποθέσεις της προηγούμενης Πρότασης, συμβολίζουμε με

$$P_{T_xM} : T_xM \times T_yN \longrightarrow T_xM$$
$$P_{T_yN} : T_xM \times T_yN \longrightarrow T_yN$$

τις κανονικές προβολές. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$T_{(x,y)}p_M = P_{T_xM} \circ \Phi,$$
$$T_{(x,y)}p_N = P_{T_yN} \circ \Phi.$$

3 ... και λίγος Διαφορικός Λογισμός

3.1 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$, $(P, \mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m, n και p, αντίστοιχα και $f : P \to M \times N$ μια απεικόνιση. Τότε η f είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν οι $f_M = pr_M \circ f : P \to M$ και $f_N = pr_N \circ f : P \to N$ είναι διαφορίσιμες. Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $p \in P$,*

(6) $$\Phi \circ T_pf = (Tpf_M, T_pf_N),$$

όπου Φ ο ισομορφισμός (5).

Απόδειξη. Έστω f διαφορίσιμη. Τότε προφανώς οι f_M και f_N είναι διαφορίσιμες, σαν συνθέσεις διαφορίσιμων. Αντίστροφα, έστω f_M και f_N διαφορίσιμες. Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη. Παίρνουμε ένα τυχαίο $z \in P$ και δύο χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $y \in V$. Επειδή οι διαφορίσιμες f_M και f_N είναι συνεχείς, οι αντίστροφες εικόνες $f_M^{-1}(U)$ και $f_N^{-1}(V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα της P, με $z \in f_M^{-1}(U) \cap f_N^{-1}(V)$. Οι χάρτες του μέγιστου άτλαντα $\mathcal{C}$ είναι βάση της τοπολογίας του P, άρα υπάρχει χάρτης $(W, \chi) \in \mathcal{C}$

με $z \in W \subseteq f_M^{-1}(U) \cap f_N^{-1}(V)$, και $f(W) \subseteq f_M(W) \times f_N(W) \subseteq U \times V$. Δηλ. οι χάρτες (W, χ) και $(U \times V, \phi \times \psi)$ δίνουν τοπική παράσταση της $f = (f_M, f_N)$:

$$F = (\phi \times \psi) \circ f \circ \chi^{-1} : \chi(W) \longrightarrow \phi(U) \times \psi(V).$$

Εφαρμόζοντας την F σε ένα $h \in \chi(W) \subseteq \mathbb{R}^p$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F(h) &= (\phi \times \psi) \circ f \circ \chi^{-1}(h) \\ &= (\phi \times \psi) \circ (f_M(\chi^{-1}(h)), f_N(\chi^{-1}(h))) \\ &= (\phi \circ f_M \circ \chi^{-1}(h), \psi \circ f_N \circ \chi^{-1}(h)) \end{aligned}$$

δηλ. η

$$F = (\phi \circ f_M \circ \chi^{-1}, \psi \circ f_N \circ \chi^{-1})$$

είναι διαφορίσιμη, αφού έχει παράγοντες τις τοπικές παραστάσεις των f_M, f_N, που είναι διαφορίσιμες.

Για την ισότητα (6), παρατηρούμε ότι για κάθε $u = [(\alpha, z)] \in T_z P$, ισχύει

$$\begin{aligned} \Phi \circ T_z f(u) &= (T_{(x,y)} p_M, T_{(x,y)} p_N)([(f \circ \alpha, f(z))]) \\ &= (T_{(x,y)} p_M([(f \circ \alpha, f(z))]), T_{(x,y)} p_N([(f \circ \alpha, f(z))])) \\ &= ([(p_M \circ f \circ \alpha, p_M \circ f(z))], [(p_N \circ f \circ \alpha, p_N \circ f(z))]) \\ &= ([(f_M \circ \alpha, f_M(z))], [(f_N \circ \alpha, f_N(z))]) \\ &= (T_z f_M(u), T_z f_N(u)). \end{aligned}$$ □

Συχνά η ισότητα (6), με παράλειψη του ισομορφισμού Φ, γράφεται σαν ταύτιση

$$T_p f \equiv (Tpf_M, T_p f_N) \tag{7}$$

Έστω τώρα μια απεικόνιση $f : M \times N \to P$. Για ένα σταθεροποιημένο σημείο $(x_o, y_o) \in M \times N$, θεωρούμε τις **μερικές απεικονίσεις**

$$\begin{aligned} f_{x_o} &: N \longrightarrow P : y \mapsto f(x_o, y), \\ f_{y_o} &: M \longrightarrow P : x \mapsto f(x, y_o). \end{aligned}$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε f_{x_o} και f_{y_o} είναι διαφορίσιμες (βλ. Άσκ. 8, από τις Ασκήσεις 03). Έχουμε το επόμενο

3.2 Θεώρημα (Τύπος του Leibniz). *Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$, $(P,\mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \times N \to P$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ταύτιση του $T_{(x,y)}(M \times N)$ με το γινόμενο $T_xM \times T_yN$, για κάθε $(x,y) \in M \times N$, έχουμε*

(8) $$T_{(x,y)}f(u,v) \equiv T_x f_y(u) + T_y f_x(v),$$

για κάθε $(u,v) \in T_xM \times T_yN$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $(x,y) \in M \times N$ και θεωρούμε ένα χάρτη $(W,\chi) \in \mathcal{C}$ με $f(x,y) \in W$. Επειδή η f είναι συνεχής, $f^{-1}(W)$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του $(x,y) \in M \times N$, ως προς την τοπολογία-γινόμενο $\tau_{\mathcal{A}} \times \tau_{\mathcal{B}}$. Έτσι, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A \subseteq M$ και $B \subseteq N$ με $(x,y) \in A \times B \subseteq f^{-1}(V)$. Οι χάρτες ενός μέγιστου άτλαντα είναι ένα βάση για την κανονική τοπολογία, επομένως υπάρχουν χάρτες $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ και $(V,\psi) \in \mathcal{B}$, με $(x,y) \in U \times V \subseteq A \times B \subseteq f^{-1}(W)$. Τότε το ζεύγος των χαρτών $(U \times V, \phi \times \psi)$, (W,χ) ορίζει τοπική παράσταση της f

$$F = \chi \circ f \circ (\phi \times \psi)^{-1} : \phi(U) \times \psi(V) \longrightarrow \chi(W),$$

που είναι διαφορίσιμη στο $(\phi(x), \psi(y))$. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_xM \times T_yN \arrow[drr, "\bar{\phi} \times \bar{\psi}"'] & \cong & T_{(x,y)}(M \times N) \arrow[r, "T_{(x,y)}f"] \arrow[d, "\overline{\phi \times \psi}"] & T_{f(x,y)}P \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\
 & & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "DF(\phi(x),\psi(y))"'] & \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$

Έστω $w \in T_{(x,y)}(M \times N)$, που συμπίπτει με $(u,v) \in T_xM \times T_yN$ μέσω της ταύτισης (5). Τότε

$$\begin{aligned}
\bar{\chi} \circ T_{(x,y)}f(w) &= [DF(\phi(x),\psi(y))] \circ [\overline{\phi \times \psi}](w) \\
&= [DF(\phi(x),\psi(y))] \circ (\bar{\phi} \times \bar{\psi})(u,v) = \\
&= [DF(\phi(x),\psi(y))](\bar{\phi}(u), \bar{\psi}(v)) = \\
&= [DF_{\psi(y)}(\phi(x))](\bar{\phi}(u)) + [DF_{\phi(x)}(\psi(y))](\bar{\psi}(v)).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
F_{\phi(x)}(k) &= \chi \circ f \circ (\phi \times \psi)^{-1}(\phi(x), k) \\
&= \chi \circ f(x, \psi^{-1}(k)) \\
&= \chi \circ f_x \circ \psi^{-1}(k),
\end{aligned}$$

είναι η τοπική παράσταση της f_x μέσω (V, ψ) και (W, χ) και, παρόμοια,

$$F_{\psi(y)}(h) = \chi \circ f_y \circ \phi^{-1}(h),$$

είναι η τοπική παράσταση της f_y μέσω (U, ϕ) και (W, χ). Επομένως, έχουμε τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "T_xf_y"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & T_{f(x,y)}P \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(\chi \circ f_y \circ \phi^{-1})(\phi(x))"'] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} T_yN \arrow[r, "T_yf_x"] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & T_{f(x,y)}P \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "D(\chi \circ f_x \circ \psi^{-1})(\psi(y))"'] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

από τα οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \circ T_{(x,y)}f(u, v) &= [D(\chi \circ f_y \circ \phi^{-1})(\phi(x))](\bar{\phi}(u)) \\ &\quad + [D(\chi \circ f_x \circ \psi^{-1})(\psi(y))](\bar{\psi}(v)) \\ &= \bar{\chi} \circ T_xf_y(u) + \bar{\chi} \circ T_yf_x(v). \end{aligned}$$

Επειδή $\bar{\chi}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται τον ισχυρισμό. $\square$

3.3 Παραδείγματα. (Α) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και $x \in M$. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ που οριζουν τοπική παράσταση $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Θεωρούμε τις κανονικές βάσεις $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{1 \leq i \leq m}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_y\}_{1 \leq j \leq n}$ του T_xM και $T_{f(x)}N$ ως προς τους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ). Από τον ορισμό των κανονικών βάσεων, παίρνουμε ότι ο πίνακας του $\bar{\phi} : T_xM \to \mathbb{R}^m$ ως προς

$\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{1\le i\le m}$ και $\{e_i\}_{1\le i\le m}$ είναι ο I_m, ενώ ο πίνακας του $\bar{\psi} : T_{f(x)}N \to \mathbb{R}^n$ ως προς $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_y\}_{1\le j\le n}$ και $\{e_j\}_{1\le j\le n}$ είναι ο I_n. Έστω A ο πίνακας της $T_x f$ ως προς τις κανονικές βάσεις $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\}_{1\le i\le m}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_y\}_{1\le j\le n}$. Η ισότητα (1) (βλ. Λήμμα 1.3) συνεπάγεται ότι

(9) $$A = I_n \cdot A = J_{\phi(x)}F \cdot I_m = J_{\phi(x)}F.$$

(Β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_s\mathbb{R} \arrow[r, "T_s f"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}"'] & T_{f(s)}\mathbb{R} \arrow[d, "\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "D(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1})(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(s))"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, επομένως, εφαρμόζοντας το $T_s f$ στο $\frac{d}{dt}|_s$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T_s f\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) &= ((\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1} \circ Df(s) \circ \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) \\
&= ((\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1} \circ Df(s))(1) \\
&= (\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(f'(s)) \\
&= f'(s)(\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(1) \\
&= f'(s)\left.\frac{d}{dt}\right|_{f(s)}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

(10) $$T_s f\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) = f'(s)\left.\frac{d}{dt}\right|_{f(s)},$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$.

(Γ) Έστω $\alpha : I \to M$ μια διαφορίσιμη καμπύλη στο M και $s \in I$. Συμβολίζουμε με $\dot{\alpha}(s)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα

(11) $$\dot{\alpha}(s) := T_s\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) \in T_{\alpha(s)}M$$

και το ονομάζουμε **το εφαπτόμενο διάνυσμα της α στο** s.