ΜΑΘΗΜΑ 05

1 Ο εφαπτόμενος χώρος

Η συνήθης έννοια της διαφορισιμότητας (στον Απειροστικό Λογισμό) στοχεύει στην τοπική προσέγγιση μιας απεικόνισης $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ που είναι διαφορίσιμη στο $x \in U$ με μια γραμμική απεικόνιση $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, που ονομάζεται διαφορικό. Για να πάρουμε την ανάλογη προσέγγιση στις πολλαπλότητες, χρειάζεται πρώτα να προσαρτήσουμε στα σημεία της πολλαπλότητας γραμμικούς χώρους, που είναι τα πεδία ορισμού και τιμών του διαφορικού. Ενώ στην Ανάλυση τα διαφορικά ορίζονται μεταξύ των σταθερών χώρων $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, στις πολλαπλότητες αυτοί οι χώροι αλλάζουν με το σημείο x.

Σε όλα τα επόμενα, θεωρούμε μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$.

1.1 Ορισμός. Μιά **διαφορίσιμη καμπύλη** της πολλαπλότητας M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\alpha : J \to M$, όπου J είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ με $0 \in J$ (όπου J είναι εφοδιασμένο με τη δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}$).

Σε πολλές περιπτώσεις, για ευκολία, θεωρούμε το J σαν συμμετρικό διάστημα της μορφής $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Επίσης λέμε ότι η καμπύλη α **περνά από το σημείο** $x \in M$, αν $\alpha(0) = x$.

1.2 Ορισμός. Έστω α, β διαφορίσιμες καμπύλες επί του M που περνούν από το $x \in M$. Θα λέμε ότι α, β **εφάπτονται στο** x, ή ότι **είναι ισοδύναμες στο** x, αν υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) επί του M με $x \in U$ και

$$D(\phi \circ \alpha)(0) = D(\phi \circ \beta)(0). \tag{1}$$

1.3 Παρατηρήσεις. 1) Για το ορισμό της επαφής δύο καμπυλών, αρκεί να είναι $\mathcal{C}^1$–διαφορίσιμες, αφού δεν απαιτείται η ύπαρξη των διαφορικών ανώτερης τάξης.

2) Επειδή $D(\phi \circ \alpha)(0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, έχουμε ότι

$$[D(\phi \circ \alpha)(0)](\lambda) = \lambda[D(\phi \circ \alpha)(0)](1),$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι η συνθήκη (1) του ορισμού είναι ισοδύναμη με την ισότητα $D(\phi \circ \alpha)(0)](1) = [D(\phi \circ \beta)(0)](1)$, δηλαδή την ισότητα

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0), \tag{2}$$

που, με τη σειρά της, είναι ισοδύναμη με

$$(x_i \circ \alpha)'(0) = (x_i \circ \beta)'(0), \quad \forall\, i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

όπου $x_i = u_i \circ \phi$, $i = 1, \ldots, m$ είναι οι τοπικές συντεταγμένες του χάρτη (U, ϕ).

Η επαφή των καμπυλών που ορίστηκε ανωτέρω, είναι ανεξάρτητη του χάρτης (U, ϕ). Πράγματι, ισχύει η επόμενη πρόταση:

1.4 Πρόταση. *Αν α, β είναι εφαπτόμενες στο $x \in M$, τότε, για κάθε χάρτη (V, ψ) επί του M με $x \in V$ έχουμε $D(\psi \circ \alpha)(0) = D(\psi \circ \beta)(0)$.*

Απόδειξη. Επειδή α, β είναι εφαπτόμενες στο $x = \alpha(0) = \beta(0)$, υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) με $x \in U$ και $D(\phi \circ \alpha)(0) = D(\phi \circ \beta)(0)$. Αν (V, ψ) είναι ένας άλλος χάρτης με $x \in V$, τότε

$$\begin{aligned} D(\psi \circ \alpha)(0) &= D((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha))(0) \\ &= D(\psi \circ \phi^{-1})((\phi \circ \alpha)(0)) \circ D(\phi \circ \alpha)(0) \\ &= D(\psi \circ \phi^{-1})((\phi \circ \beta)(0)) \circ D(\phi \circ \beta)(0) \\ &= D((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \beta))(0) \\ &= D(\psi \circ \beta)(0). \end{aligned}$$

□

1.5 Πόρισμα. *Η επαφή των καμπυλών σε ένα σημείο $x \in M$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Λόγω του προηγούμενη πορίσματος, το σύνολο των διαφορίσιμων καμπυλών που περνούν από το $x \in M$ διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $[(\alpha, x)]$ την κλάση μιας τέτοιας καμπύλης α.

1.6 Ορισμός. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας όλων των διαφορίσιμων καμπυλών επί του M που περνούν από το x θα λέγεται **ο εφαπτόμενος χώρος του M στο** x και θα συμβολίζεται με T_xM. Τα στοιχεία του T_xM θα λέγονται **εφαπτόμενα διανύσματα στο** x και συνήθως θα συμβολίζονται με u, v, w, κλπ.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο T_xM μπορεί να εφοδιαστεί με δομή διανυσματικού χώρου.

1.7 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $x \in M$. Ακόμη, έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε η απεικόνιση*

$$\bar{\phi} : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^m : [(\alpha, x)] \mapsto [D(\phi \circ \alpha)(0)](1) = (\phi \circ \alpha)'(0)$$

είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη. (ι) Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\bar{\phi}$ είναι καλά ορισμένη, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη της επιλογής της καμπύλης α που ορίζει την κλάση $[(\alpha, x)]$. Πράγματι, έστω $\beta \in [(\alpha, x)]$· δηλαδή, έστω β μια διαφορίσιμη καμπύλη επί του M, εφαπτόμενη στην α. Από τον ορισμό της επαφής, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, που είναι η ζητούμενη ισότητα.

(ii) Αποδεικνύουμε ότι $\bar{\phi}$ είναι 1–1: Έστω $[(\alpha, x)], [(\beta, x)] \in T_xM$ με $\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = \bar{\phi}([(\beta, x)])$. Τότε, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, δηλαδή, α και β είναι εφαπτόμενες στο x και $[(\alpha, x)] = [(\beta, x)]$.

(iii) Τέλος δείχνουμε ότι $\bar{\phi}$ είναι επί: Έστω $h \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m : t \mapsto \phi(x) + th.$$

Τότε ε είναι διαφορίσιμη με $\varepsilon(0) = \phi(x)$ και $\varepsilon'(0) = h$. Επειδή ε είναι συνεχής, και $\phi(U)$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του $\phi(x) = \varepsilon(0)$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα J που περιέχει το 0, με $\varepsilon(J) \subseteq \phi(U)$, έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση $\alpha := \phi^{-1} \circ \varepsilon|_J : J \to U \subseteq M$. Τότε α είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη επί του M με $\alpha(0) = x$ και

$$\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \varepsilon'(0) = h. \qquad \square$$

1.8 Πόρισμα. *Για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\phi}^{-1}(h) = [(\alpha, x)]$, όπου*

$$\alpha(t) = \phi^{-1}(\phi(x) + th),$$

με t σε ένα κατάλληλο διάστημα J.

Η απεικόνιση $\bar{\phi}$ ταυτίζει τα σύνολα T_xM και $\mathbb{R}^m$. Επομένως, μπορούμε να μεταφέρουμε την αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}^m$ στο T_xM, θέτοντας

(4)
$$\begin{aligned} u + v &:= \bar{\phi}^{-1}(\bar{\phi}(u) + \bar{\phi}(v)) \\ \lambda u &:= \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u)) \end{aligned}$$

για κάθε $u, v \in T_xM$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η άλγεβική δομή του T_xM μπορεί να οριστεί μέσω της σχέσης
$$\lambda u + \mu v := \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u) + \mu\bar{\phi}(v)),$$
επομένως παίρνουμε την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, θέτοντας $u + v := 1u + 1v$ και $\lambda u := \lambda u + 0u$.

Προφανώς έχουμε το επόμενο

1.9 Θεώρημα. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε οι πράξεις (4) ορίζουν στον T_xM δομή διανυσματικού χώρου, έτσι ώστε $\bar{\phi}$ να γίνεται ένας γραμμικός ισομορφισμός.*

Αν $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε υπάρχουν δύο απεικονίσεις
$$\bar{\phi}, \bar{\psi} : T_xM \to \mathbb{R}^m.$$
Γενικά, $\bar{\phi} \neq \bar{\psi}$. Όμως, ορίζουν την ίδια δομή διανυσματικού χώρου (: τις ίδιες πράξεις) επί του M: Δηλαδή, αν
$$\lambda \circ u \oplus \mu \circ v := \bar{\psi}^{-1}(\lambda\bar{\psi}(u) + \mu\bar{\psi}(v)),$$
τότε
$$\lambda \circ u \oplus \mu \circ v = \lambda u + \mu v,$$
η, ισοδύναμα,

(5)
$$\bar{\psi}^{-1}(\lambda\bar{\psi}(u) + \mu\bar{\psi}(v)) = \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u) + \mu\bar{\phi}(v)).$$

Για να αποδείξουμε την ανωτέρω ισότητα, πρώτα χρειαζόμαστε το επόμενο

1.10 Λήμμα. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε*
$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1} = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))$$

Απόδειξη. Έστω $h \in \mathbb{R}^m$. Επειδή $\bar{\phi}$ είναι ένας ισομορφισμός, υπάρχει ένα μοναδικό $[(\alpha, x)] \in T_xM$ με $\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = h$. Επομένως,

$$\begin{aligned}(\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([(\alpha, x)]) = [D(\psi \circ \alpha)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi \circ \alpha(0)) \circ D(\phi \circ \alpha)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))]((\phi \circ \alpha)'(0)) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))](h),\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

1.11 Παρατήρηση. Στην προηγούμενη απόδειξη, ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $[(\alpha, x)]$ είναι η καμπύλη $\phi^{-1} \circ \varepsilon|_J$, όπου $\varepsilon(t) = \phi(x) + th$. Χρησιμοποιώντας αυτή την συγκεκριμένη καμπύλη, έχουμε

$$\begin{aligned}(\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([(\phi^{-1} \circ \varepsilon|_J, x)]) \\ &= (\psi \circ \phi^{-1} \circ \varepsilon)'(0) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1} \circ \varepsilon)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\varepsilon(0)) \circ D(\varepsilon)(0)](1) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))](\varepsilon'(0)) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))](h).\end{aligned}$$

1.12 Θεώρημα. *Η δομή διανυσματικού χώρου του T_xM δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη (U, ϕ) που την οριζει.*

Απόδειξη. Αν (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε (5) είναι ισοδύναμη με την

$$\lambda\bar{\psi}(u) + \mu\bar{\psi}(v) = (\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1})(\lambda\bar{\phi}(u) + \mu\bar{\phi}(v)),$$

που είναι προφανής, αφού $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. □

1.13 Ορισμός. Θεωρούμε ένα χάρτη (U, ϕ) και $x \in U$. Αν $\{e_i\}_{i=1,\ldots,m}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$, τότε το σύνολο $\{\bar{\phi}^{-1}(e_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ είναι μια βάση του T_xM, ονομαζόμενη **κανονική βάση του** T_xM **ως προς τον** (U, ϕ). Τα διανύσματα $\bar{\phi}^{-1}(e_i)$ λέγονται **κανονικά βασικά εφαπτόμενα διανύσματα του** T_xM **ως προς τον** (U, ϕ) και συμβολίζονται με

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x := \bar{\phi}^{-1}(e_i)\,, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Στην ειδική περίπτωση της τετριμμένης 1–διάστατης πολλαπλότητας $\mathbb{R}$, το κανονικό βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα στον $T_t\mathbb{R}$, ως προς το χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ συμβολίζεται με

(7) $$\left.\frac{d}{dt}\right|_t := (\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(1).$$

Επομένως, κάθε $u \in T_xM$ μπορεί να πάρει την μορφή

(8) $$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .$$

Εφαρμόζοντας την $\bar{\phi}$ στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας, παίρνουμε

$$\bar{\phi}(u) = \bar{\phi}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{\phi}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι

$$\bar{\phi}(u) = (\phi \circ \alpha)'(0) = ((x_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (x_m \circ \alpha)'(0)),$$

όπου $x_i = pr_i \circ \phi$ οι συντεταγμένες του χάρτη (U, ϕ), βρίσκουμε για τους συντελεστές λ_i ότι

(9) $$\lambda_i = (x_i \circ \alpha)'(0), \qquad i = 1, \dots, m,$$

και για το διάνυσμα u ότι

(10) $$u = \sum_{i=1}^{m} (x_i \circ \alpha)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .$$