# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 09
# Διανυσματικά Πεδία

**1.** Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια $m$-διάστατη πολλαπλότητα και $(U, \phi)$, $(V, \psi)$ δύο τεμνόμενοι χάρτες με αντίστοιχες συντεταγμένες $(x_i)_{1\leq i\leq m}$, $(y_j)_{1\leq j\leq m}$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{1}$$

**2.** Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, έστω $(\xi_i)$ και $\left(\overline{\xi}_j\right)$ οι συντεταγμένες του $\xi \in \mathcal{X}(M)$ ως προς τους δύο δεδομένους χάρτες. Δείξτε ότι

$$\overline{\xi}_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad \text{και} \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{\xi}_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

**3.** Δείξτε ότι $\xi(c) = 0$, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και κάθε σταθερή $c \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

**4.** Έστω $(x_1, x_2, x_3)$ οι συντεταγμένες του $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$

$$\xi = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_1 + x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Αν $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}_3, \mathbb{R})$, με $f(x, y, z) = x - 2y$, υπολογίστε την $\xi(f)$ στο $(1, 3, -2)$.

**5.** Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $x_o \in M$, με $\xi(x_o) \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοιχτή περιοχή $A$ του $x_o$ με $\xi(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.

**6.** Θεωρούμε τους χάρτες $(U_N, \theta_N)$, $(U_S, \theta_S)$ του μοναδιαίου κύκλου $S^1$ (βλ. Παράδειγμα 1.2 (Δ3) του Μαθήματος 01). Συμβολίζουμε με $\frac{\partial}{\partial x_N}$ και $\frac{\partial}{\partial x_S}$ τα βασικά διανυσματικά πεδία αυτών των χαρτών.

(α) Να δείξετε ότι

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_N}\right|_{U_N \cap U_S} = \left.\frac{\partial}{\partial x_N}\right|_{U_N \cap U_S}.$$

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ολικό βασικό διανυσματικό πεδίο $\xi_o \in \mathcal{X}(S^1)$. Δηλ. ένα $\xi_o$ με την ιδιότητα:

$$\forall\, \xi \in \mathcal{X}(S^1), \;\; \exists!\, f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}) \;:\; \xi = f\xi_o.$$

**7.** Μια $m$-διάστατη πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$ λέγεται **παραλληλοποιήσιμη**, αν υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathcal{X}(M)$ με την ιδιότητα: $\forall\, \xi \in \mathcal{X}(M)$, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} f_i \xi_i.$$

(α) Εξηγείστε γιατί οι πολλαπλότητες $\mathbb{R}_n$, $A$ ($A \subset \mathbb{R}_n$ ανοιχτό), και $S^1$ είναι παραλληλοποιήσιμες. Βρείτε τις αντίστοιχες οικογένειες $\{\xi_i\}_i$.

(β) Να εξετάσετε αν το καρτεσιανό γινόμενο παραλληλοποιήσιμων πολλαπλοτήτων είναι παραλληλοποιήσιμο.