ΑΣΚΗΣΕΙΣ 05
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΣ ΧΩΡΟΣ

1. Έστω $u = [(\alpha, x)], v = [(\beta, x)] \in T_x M$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν καμπύλες γ και δ στο M, τέτοιες ώστε $u + v = [(\gamma, x)]$ και $\lambda u = [(\delta, x)]$.

2. Να βρεθεί μια καμπύλη που υλοποιεί το μηδενικό στοιχείο $0_x \in T_x M$.

3. Να βρεθεί μια καμπύλη που υλοποιεί το βασικό διάνυσμα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ που ορίζεται από τον χάρτη $(U, \phi = (x_1, ..., x_m))$. Ιδιαιτέρως, βρείτε καμπύλη που υλοποιεί το $\frac{d}{dt}\Big|_t \in T_t\mathbb{R}$.

4. Έστω η μοναδιαία σφαίρα S^2 και το σημείο $p = (0, 1, 0) \in S^2$. Αν $u \in T_p S^2$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα με συντεταγμένες $(2, -1)$, ως προς τον χάρτη (U_y^+, ϕ_y^+), να βρεθεί μια διαφορίσιμη καμπύλη που υλοποιεί το u.

5. Δείξτε ότι οι καμπύλες $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, με $\alpha(t) = (t, 1 + t^2, t)$ και $\beta(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ορίζουν το ίδιο εφαπτόμενο διάνυσμα $u \in T_{(0,1,0)}\mathbb{R}^3$. Να εκφράσετε το u μέσω της κανονικής βάσης που ορίζεται από τον χάρτη $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

6. Αν $\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ είναι η διαφορίσιμη καμπύλη

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} t+1 & 2t^2 \\ 3t & 2t+1 \end{pmatrix},$$

να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος $u = [(\alpha, I)] \in T_I \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, ως προς τον συνήθη χάρτη του $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Εδώ I συμβολίζει τον ταυτοτικό πίνακα.

7. Έστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση

$$\phi(t, s) := \left(\frac{2t+s}{3}, \frac{2t-s}{3} \right).$$

Δείξτε ότι $(\mathbb{R}^2, \phi)$ είναι χάρτης της συνήθους διαφορικής δομής του $\mathbb{R}^2$, και να βρεθεί μια καμπύλη που υλοποιεί το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$u = 2 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p - 3 \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p$$

όπου $p = (\frac{1}{2}, 0)$, και x_1, x_2 είναι οι συντεταγμένες του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \phi)$.

8. Έστω $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ η καμπύλη με $\alpha(t) = [(2t + 1, 1, t^2)]$. Δείξτε ότι η α είναι διαφορίσιμη στο 0, και προσδιορίστε τις συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος $u = [(\alpha, \alpha(0))]$ ως προς τον χάρτη (U_2, ϕ_2) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.