

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ
20/06/2024

ΘΕΜΑ 1. Δίνεται η απεικόνιση $f : S^2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $f(x, y, z) = [(x, y, z)]$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $S = (0, 0, -1)$.

(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $T_S f(v)$, αν το διάνυσμα $v \in T_S S^2$ έχει συντεταγμένες $(2, 1)$ ως προς τον χάρτη (U_z^-, ϕ_z^-) .

ΘΕΜΑ 2. Έστω $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \rightarrow N$.

(α) Πότε λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (δώστε τον ορισμό) και πότε αμφιδιαφόριση;

(β) Να ελέγξετε αν ισχύει η ισοδυναμία: η $f : M \rightarrow N$ είναι αμφιδιαφόριση αν και μόνον αν η $Tf : TM \rightarrow TN$ είναι αμφιδιαφόριση.

ΘΕΜΑ 3. Έστω (M, \mathcal{A}) μια m -διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ η (ολική) διαφορική ροή ενός $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $v \in T_0 \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\eta(x) = T_0 \theta_x(v), \quad \forall x \in M.$$

(α) Να δείξετε ότι $\eta \in \mathcal{X}(M)$.

(β) Να βρείτε την σχέση που συνδέει τα ξ και η .

ΘΕΜΑ 4. Έστω (M, \mathcal{A}) μια m -διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και (x_1, x_2, \dots, x_m) οι συντεταγμένες ενός χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.

(α) Να δείξετε ότι $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του $[\xi, \eta]$, αν

$$\xi = 5 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{και} \quad \eta = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Να απαντήσετε και στα 4 θέματα

Καλή επιτυχία!!!