Σχετικά με το φάσμα τελεστή

Παρατηρήσεις Θεωρούμε [1] δυο χώρους Banach E και F και μια (μη μηδενική) γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$. Αν η T είναι φραγμένη με φραγμένο αντίστροφο, τότε η εικόνα $\operatorname{im}(T)$ είναι ίση με F, ειδικότερα είναι πυκνή στον F και υπάρχουν θετικοί αριθμοί m, M ώστε

$$m\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in E. \tag{*}$$

Μπορούμε να πάρουμε $M = \|T\|$ και $m = 1/\|T^{-1}\|$, αφού $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \le \|T^{-1}\|\|Tx\|$.

Αντίστροφα, αν η T έχει πυκνή εικόνα και ικανοποιεί τις ανισότητες (*), τότε βεβαίως είναι 1-1, όμως είναι και επί, γιατί το σύνολο τιμών της είναι κλειστό:

Πράγματι, αν $Tx_n \to y$ τότε η ανισότητα $m\|x_i - x_j\| \le \|Tx_i - Tx_j\|$ δείχνει ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy στον E, οπότε (πληρότητα!) συγκλίνει σε κάποιο x, και τότε, αφού ο T είναι φραγμένος (από το M), έχουμε $y = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tx$.

Δηλαδή η απεικόνιση $T^{-1} : Tx \mapsto x : F \to E$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική, και η ανισότητα $m\|T^{-1}(Tx)\| \le \|Tx\|$ δείχνει ότι είναι φραγμένη (από $1/m$).

Συμπέρασμα:

Πρόταση 1. *Ένας φραγμένος τελεστής $T : E \to F$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \ge m\|x\|$ για κάθε $x \in E$ (λέμε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E»).*

Έστω E χώρος Banach.

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή $A : E \to E$ είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο }\}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και οτι

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}.$$

Ορισμός 1. *Έστω $A \in \mathcal{B}(E)$. Το **σημειακό φάσμα (point spectrum)** $\sigma_p(A)$ του A είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \ne \{0\}\}.$$

*Το **προσεγγιστικά σημειακό φάσμα (approximate point spectrum)** $\sigma_a(A)$ του A είναι το σύνολο των **προσεγγιστικών ιδιοτιμών (approximate eigenvalues)**, δηλαδή το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E:*

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

*Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)** $\sigma_c(A)$ του A είναι το σύνολο*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \ne E\}.$$

Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στον E με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.

[1] specS256, 1 Μαρτίου 2026

Τα σύνολα $\sigma_a(A)$ και $\sigma_c(A)$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ίσα και ταυτίζονται με το (σημειακό) φάσμα. Σε απειροδιάστατους χώρους μπορεί να μην ταυτίζονται.[2] Πάντοτε όμως,

Πρόταση 2. *Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1 στον τελεστή $T_\lambda = A - \lambda I : E \to E$:
Έχουμε $\lambda \notin \sigma_a(A)$ αν-ν ο T_λ είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E, και έχουμε $\lambda \notin \sigma_c(A)$ αν-ν το σύνολο τιμών του T_λ είναι πυκνό στον E. Συνεπώς, από την Πρόταση 1, έχουμε $\lambda \notin \sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ αν-ν ο T_λ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν-ν $\lambda \notin \sigma(A)$. $\square$

Το φάσμα συμπίεσης είναι κατά κάποιον τρόπο δυϊκό προς το σημειακό φάσμα. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα σε χώρους Hilbert. Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 3. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \qquad \text{και} \qquad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Επομένως ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του T^* είναι πυκνό.

Απόδειξη. Έχουμε $Tx = 0$ αν και μόνον αν $\langle Tx, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν $\langle x, T^*y\rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν το x είναι κάθετο στο σύνολο τιμών του T^*, αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του T^* δεν ειναι πυκνο.

Για την δεύτερη ισότητα, εφαρμόζοντας την πρώτη στον T^* έχουμε
$(\ker T^*)^\perp = (T(\mathcal{H}))^{\perp\perp} = \overline{T(\mathcal{H})}$. $\square$

Λήμμα 4. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*
(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$
(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ *και* $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

Απόδειξη. Οι σχέσεις $AB = I = BA$ και $B^*A^* = I = A^*B^*$ είναι ισοδύναμες. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A^* είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Η (i) έπεται θέτοντας $A = T - \lambda I$.

Για την (ii), εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα: έχουμε $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ αν και μόνον αν το $(T^* - \bar{\lambda} I)(\mathcal{H})$ δεν είναι πυκνό. $\square$

[2]Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 5, για τον τελεστή της μετατόπισης S, το $\sigma_a(S)$ είναι η μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$, ενώ το $\sigma_c(S)$ είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος $\mathbb{D}$, οπότε $\sigma_c(S) \cap \sigma_a(S) = \emptyset$.

Παράδειγμα 5. *Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ για καθε $n \geq 0$, τότε*

$$\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma_c(S) = \sigma_p(S^*) = \mathbb{D}, \quad \sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}$$

(όπου $\mathbb{D}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος και $\mathbb{T}$ η μοναδιαία περιφέρεια).

Απόδειξη. **(i)** Η σχέση $\|Sx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \ell^2$ δείχνει ότι $\|S\| = 1$, άρα $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

(ii) Ισχυρίζομαι ότι $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$.

Πράγματι, έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \ell^2, x \neq 0$ τέτοιο ώστε $S^*x = \lambda x$, δηλαδή

$$(x_1, x_2, ...) = (\lambda x_0, \lambda x_1, ...).$$

Τότε $x_1 = \lambda x_0,\ x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$ και γενικά $x_n = \lambda^n x_0$. Επειδή $x \in \ell^2$, έπεται ότι $\sum_n |\lambda|^{2n} < \infty$ (διότι $x_0 \neq 0$ αφού $x \neq 0$) άρα $|\lambda| < 1$.

Αντίστροφα αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε το διάνυσμα $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, ...)$ είναι μη μηδενικό στοιχείο του ℓ^2 και ικανοποιεί $S^*x = \lambda x$, άρα $\lambda \in \sigma_p(S^*)$.

(iii) Ισχυρίζομαι ότι $\sigma_p(S) = \emptyset$. Πραγματι, έστω $x = (x_n) \in \ell^2$ ώστε $Sx = \lambda x$, δηλαδή

$$(0, x_0, x_1, ...) = (\lambda x_0, \lambda x_1, ...).$$

Αν $\lambda = 0$ τότε η σχέση αυτή δείχνει ότι $x = 0$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε από την σχέση $\lambda x_0 = 0$ έχουμε $x_0 = 0$, από την σχέση $\lambda x_1 = x_0$ έχουμε $x_1 = 0$ και ούτω καθεξής, άρα πάλι $x = 0$. Επομένως $\sigma_p(S) = \emptyset$.

(iv) Έπεται τώρα ότι $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$.

Πράγματι, έχουμε $\mathbb{D} = \sigma_p(S^*) \subseteq \sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ άρα $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}}$ εφόσον το $\sigma(S^*)$ είναι κλειστό. Επομένως $\sigma(S) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(S^*)\} = \overline{\mathbb{D}}$.

(v) Δειχνουμε οτι $\sigma_a(S) = \mathbb{T}$.

Έστω $\lambda \in$ T. Να δειξουμε οτι $\lambda \in \sigma_a(S)$:
Εφόσον $\lambda \in \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$, ο $S - \lambda I$ δεν ειναι αντιστρεψιμος. Συνεπως είτε το $\{Sx - \lambda x : \|x\| = 1\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, είτε η εικονα του $S - \lambda I$ δεν ειναι πυκνη στον ℓ^2, δηλαδη υπαρχει μη μηδενικο $x \in \ell^2$ καθετο στην εικονα του $S - \lambda I$. Τοτε ομως το $S^*x - \bar{\lambda}x$ θα μηδενιζεται, δηλαδή το $\bar{\lambda}$ θα ειναι ιδοτιμή του S^*. Δείξαμε όμως οτι αυτο συμβαινει μονον οταν $\bar{\lambda} \in \mathbb{D}$. Συνεπως αυτο το ενδεχομενο αποκλειεται, αρα το $\{Sx - \lambda x : \|x\| = 1\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, δηλαδη $\lambda \in \sigma_a(S)$.

Δειχνουμε οτι αν $\lambda \notin \mathbb{T}$ τοτε $\lambda \notin \sigma_a(S)$, δηλαδη οτι το $\{\|Sx - \lambda x\| : \|x\| = 1\}$ είναι κάτω φραγμένο:
Πράγματι, αν $\lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$ τοτε ο $S - \lambda I$ ειναι αντιστρεψιμος, οποτε $\|Sx - \lambda x\| \geq \|(S - \lambda I)^{-1}\| \|x\|$ για κάθε $x \in \ell^2$. Και αν $\lambda \in \overline{\mathbb{D}} \backslash \mathbb{T}$ τοτε για κάθε $x \in \ell^2$ έχουμε

$$\|(S - \lambda I)x\| \geq \big|\|Sx\| - \|\lambda x\|\big| = \big|\,\|x\| - \|\lambda x\|\,\big| = (1 - |\lambda|)\,\|x\|\,.$$

Επομενως το $\{\|Sx - \lambda x\| : \|x\| = 1\}$ είναι κάτω φραγμένο απο $1 - |\lambda|$ που ειναι θετικο, αφου $\lambda \in \mathbb{D}$. □

Παρατηρηση Στο (ii) δειξαμε οτι καθε $\lambda \in \mathbb{D}$ ειναι ιδιοτιμη του S^* και επιπλεον οτι ο αντιστοιχος ιδιοχωρος ειναι μονοδιαστατος, ειναι ο χωρος που παραγεται απο το διανυσμα x_λ.