

Καλως ηρθατε στον χωρο Hilbert του Hardy  
και τους τελεστες του

<https://eclass.uoa.gr/courses/MATH797/>

Εαρινο Εξαμηνο 2026

- 1 Ο Χωρος  $H^2$  του Hardy
- 2 Στοιχεια Θεωριας Τελεστων
- 3 Οι Τελεστες Μετατοπισης (Shift Operators)
- 4 Παραγοντοποιηση συναρτησεων
  - Υπενθυμισεις Μιγαδικης Αναλυσης
  - Ριζες εσωτερικων συναρτησεων

# Ο Χώρος $H^2$ του Hardy

Αν  $a_n \in \mathbb{C}$  και  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$  τότε για κάθε  $r \in (0, 1)$  έχουμε  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$  συνεπώς η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  συγκλίνει απολυτα για κάθε  $z \in \mathbb{D}$  και ομοιομορφα σε κάθε δισκο ακτινας  $r < 1$ , αρα οριζει συναρτηση  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  που μαλιστα εχει μιγαδικη παραγωγο (και καθε ταξης), ειναι δηλαδη **ολομορφη** στον ανοικτο δισκο  $\mathbb{D}$ .

## Ορισμός

$$H^2 := \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Η  $(a_n) \mapsto f : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2$  ειναι γραμμικος ισομορφισμος.<sup>1</sup> Αρα, με το **εσωτερικο γινόμενο**  $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$ , οπου  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  (και νορμα  $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$ ), ο  $H^2$  ειναι **χωρος Hilbert**.

---

<sup>1</sup>Εξπλεϊν Χουαϊ!

## Ορισμός

Έστω  $E$  ένας  $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ ). Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (inner product ή scalar product) στον  $E$  είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i)  $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii)  $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε  $x, x_1, x_2, y \in E$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Η  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$  είναι νόρμα στον  $E$ , άρα η  $d(x, y) := \|x - y\|$  είναι μετρική. Ο  $E$  λέγεται **χώρος Hilbert** αν ο  $(E, d)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.

# Υπενθυμιση: Χώροι Hilbert II

## Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν  $M$  είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

όπου  $M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in M\}$ .

Δηλαδή  $\forall y \in H$  γράφεται μοναδικά  $y = y_M + y_\perp$  όπου  $y_M \in M, y_\perp \in M^\perp$ .

Πυθαγόρειο:  $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$

## Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

# Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert / Ορθοκανονικές βάσεις

## Θεώρημα (Riesz)

Εστω  $H$  χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$  υπάρχει μοναδικό  $x \in H$  ώστε

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } y \in H.$$

## Ορισμός

Μια ακολουθία  $\{x_n\}$  σ' έναν χώρο Hilbert  $H$  λέγεται **ορθοκανονική βάση** του αν (a)  $\langle x_n, x_m \rangle = \delta_{mn}$  και (b) η κλειστή γραμμική θήκη της  $\{x_n\}$  είναι όλος ο χώρος  $H$ .

Τότε για κάθε  $x \in H$  έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k \leq n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|_H = 0 \quad \text{και} \quad \|x\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, x_k \rangle|^2.$$

## Ο Χωρος $H^2$ του Hardy II

Ο  $H^2$  είναι χώρος (ολομορφών) συναρτησεων  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### Παράδειγμα

Η  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  ανήκει στον  $H^2$ , αλλά δεν επεκτείνεται σε μεγαλύτερο δίσκο (δεν ορίζεται καν όταν  $z = 1 \in \overline{\mathbb{D}}$ ).

### Παράδειγμα

Η  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  (ορίζεται και) είναι ολομορφη στο  $\mathbb{D}$ , αλλά δεν ανήκει στον  $H^2$ .

# Ο Χωρος $H^2$ του Hardy III

## Θεώρημα

Για καθε  $z_0 \in \mathbb{D}$ , η απεικονιση  $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$  ειναι συνεχης. Μαλιστα,  $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$  για καθε  $f \in H^2$ , οπου  $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$ .

Πρβλ:

## Παρατήρηση

Στον χωρο  $C([0, 1])$  με εσωτ. γινομενο  $\langle f, g \rangle := \int f(t) \overline{g(t)} dt$  η απεικονιση  $f \mapsto f(1) : (C([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$  ΔΕΝ ειναι συνεχης.

# Ο Χώρος $H^2$ του Hardy III

## Πρόταση

Αν  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  στον  $H^2$ , τότε  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  ομοιομορφα στα συμπαγή υποσυνολα του  $\mathbb{D}$ .

## Ορισμός

Η συναρτηση  $k(z, w) := k_w(z) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$ ,  $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$  λεγεται πυρηνας του Szegő.

Εχουμε  $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$  για καθε  $f \in H^2$ .

# Reproducing Kernel Hilbert Spaces

Ενημερωτικά:

Εστω  $X$  μη κενό σύνολο (συνήθως  $X \subseteq \mathbb{C}^d$ ). Ένας χώρος  $\mathcal{H}$  λέγεται

**Reproducing Kernel Hilbert Space** στο  $X$  όταν

(α) αποτελείται από συναρτήσεις  $X \rightarrow \mathbb{C}$  και είναι γραμμικός χώρος με πράξεις κατά σημείο,

(β) είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο ως προς το οποίο είναι χώρος Hilbert, και

(γ) για κάθε  $z_0 \in X$  η απεικόνιση  $f \mapsto f(z_0) : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$  είναι συνεχής.

Επεται τότε (Θεώρημα Riesz) ότι για κάθε  $z_0 \in X$  υπάρχει  $k_{z_0} \in \mathcal{H}$  ώστε  $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$  για κάθε  $f \in \mathcal{H}$ . Η συνάρτηση

$$k(z, w) := k_w(z) \quad (z, w) \in X \times X$$

λέγεται **πυρήνας αναπαραγωγής (reproducing kernel)** για τον  $\mathcal{H}$ .

# Υπενθυμιση: Ο χώρος $L^2(\mathbb{T})$

## Ορισμός

Ο χώρος  $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, m)$  αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  που είναι (Borel ή Lebesgue) μετρήσιμες και ικανοποιούν

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm < +\infty. \quad (m: \text{μετρο Lebesgue})$$

Ο αριθμός  $\left( \int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm \right)^{1/2}$  συμβολίζεται  $\|f\|_2$ .

Θέτω  $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, m) : \|f\|_2 = 0\}$ .

Αν  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, m)$ , έχω  $f = g$   $m$ -σχ. παντού  $\iff f - g \in \mathcal{N}$ .

Επίσης, ο  $\mathcal{N}$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, m)$ .

Θέτω  $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$ . Είναι καλά ορισμένη **νόρμα** στον χώρο πηλίκου  $L^2(\mathbb{T}) := \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, m)/\mathcal{N}$ .

Έπεται ότι ο  $L^2(\mathbb{T})$  αποτελείται από τις **κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων** του  $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, m)$  modulo ισότητα σχ. παντού.

## Υπενθυμιση: Ο χώρος $L^2(\mathbb{T})$

**Θεώρημα (Riesz–Fisher)** Ο  $L^2(\mathbb{T})$  είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η  $\|\cdot\|_2$  προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dm).$$

Ο  $C(\mathbb{T})$  εμφυτευεται ως υποχωρος του  $L^2(\mathbb{T})$  (δυο συνεχεις συναρτησεις που ταυτιζονται  $m$ -σχεδον παντου, ταυτιζονται παντου).

**Θεώρημα** (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο  $C(\mathbb{T})$  είναι πυκνός στον  $L^2(\mathbb{T})$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , βεβαίως.

## Υπενθυμιση: Ο Χωρος $L^2(\mathbb{T})$

Ο  $L^2(\mathbb{T})$  δεχεται εσωτερικο γινομενο  $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$  και ορθοκανονικη βαση  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  οπου  $f_n(e^{it}) = e^{int}$ . Γραφουμε  $\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Δηλαδη **(a)**  $\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{mn}$  και **(b)** για καθε  $f \in L^2(\mathbb{T})$  εχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) f_k \right\|_{L^2} = 0 \quad \text{και} \quad \|f\|_{L^2}^2 \stackrel{(P)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2.$$

**(P): Parseval**

Ο  $L^2(\mathbb{T})$  ειναι η  $\|\cdot\|_{L^2}$ - κλειστη θηκη των *τριγ. πολυωνυμων*  $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Σχολιο.** Δεν ειναι αληθεια εν γενει οτι η σειρα  $\sum \hat{f}(k) e^{ikt}$  συγκλινει για καθε  $e^{it}$ !

# Ο Χώρος $\widetilde{H}^2$ του Hardy στον κύκλο $\mathbb{T}$

Ο  $L^2(\mathbb{T})$  είναι η  $\|\cdot\|_{L^2}$ -κλειστή θήκη των *τριγ. πολυωνυμών*  $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

## Ορισμός

$$\widetilde{H}^2 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle \tilde{f}, f_n \rangle = 0 \quad \forall n < 0 \right\}.$$

Ο  $\widetilde{H}^2$  είναι κλειστός γραμμ. υποχώρος του  $L^2(\mathbb{T})$ . Είναι η  $\|\cdot\|_{L^2}$ -κλειστή θήκη των *αναλυτικών τριγ. πολυωνυμών*  $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ .

# Ο Χωρος $\tilde{H}^2$ και ο χωρος $H^2$

$\tilde{H}^2 \equiv H^2(\mathbb{T})$ : αποτελείται από (σχ. παντου ορισμενες) συναρτησεις  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  (mod. ισοτητα σχεδον παντου).

$H^2 \equiv H^2(\mathbb{D})$ : αποτελείται απο συναρτησεις  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Ειναι η  $\|\cdot\|_{H^2}$ - κλειστη θηκη των *πολυωνυμων*  $\text{span}\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$  οπου  $\zeta_k(z) = z^k, z \in \mathbb{D}$ .

Ισομορφισμοι: <sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccccc} f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n & \longleftrightarrow & (a_n) & \longleftrightarrow & \tilde{f} \sim \sum_{n \geq 0} a_n f_n \\ & & H^2 & \longleftrightarrow & \ell^2 & \longleftrightarrow & \tilde{H}^2 \end{array}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$a_n = \langle \tilde{f}, f_n \rangle$$

$$f \rightsquigarrow \tilde{f}$$

### Θεώρημα

Αν  $f \in H^2$  με  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ορίζουμε για  $r \in (0, 1)$

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}, \quad e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Τότε  $f_r \in \tilde{H}^2$  και υπάρχει το

$$\lim_{r \nearrow 1} f_r := \tilde{f} \quad \text{ως προς τη νόρμα του } \tilde{H}^2$$

οπότε  $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$  με  $\langle \tilde{f}, f_n \rangle = a_n \quad \forall n \geq 0$ .

### Πόρισμα

Αν  $f \in H^2$  υπαρχει  $(r_n)$  με  $0 \leq r_n \nearrow 1$  ώστε

$$\lim_n f(r_n e^{it}) = \tilde{f}(e^{it})$$

σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

(Θα δειξουμε σε λιγο κατι πολυ ισχυροτερο, το Θεωρημα Fatou.)

### Παρατήρηση

Αν μια  $f$  οριζεται και ειναι συνεχης στον κλειστο δισκο  $\overline{\mathbb{D}}$  (πχ αν ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του  $\overline{\mathbb{D}}$ ) τοτε  $\tilde{f}(e^{it}) = f(e^{it})$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

# Ο Χωρος $H^2$ του Hardy: εναλλακτικός ορισμός

## Θεώρημα

Εστω  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Εχουμε

$$f \in H^2 \iff \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

Μαλιστα

$$f \in H^2 \Rightarrow \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \|f\|^2.$$

## Πόρισμα

Εστω  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Η συναρτηση

$$r \mapsto M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

ειναι αυξουσα στο  $(0, 1)$ . Η  $f$  ανηκει στον  $H^2$  αν-ν η  $r \mapsto M(r)$  ειναι φραγμενη, και τοτε  $\|f\|^2 = \lim_{r \nearrow 1} M(r)$ .

Υπενθυμιση:

Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Αν  $f$  είναι ολομορφη σε ανοικτο συνολο που περιεχει τον κλειστο δισκο  $\overline{\mathbb{D}}$ , τότε για καθε  $z_0 = re^{it} \in \mathbb{D}$  εχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is}) \frac{1}{1 - re^{i(t-s)}} ds.$$

$$\tilde{f} \rightsquigarrow f$$

Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος Poisson)

Αν  $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ , η αντιστοιχη  $f \in H^2$  είναι η

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(t-s) ds, \quad re^{it} \in \mathbb{D}$$

οπου  $P_r$  ο πυρηνας Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad r \in [0, 1), \theta \in [-\pi, \pi].$$

Αποδειξη στο [poissonn.pdf](#).

# Το Θεώρημα του Fatou για τον $H^2$

## Θεώρημα

Αν  $f \in H^2$ , υπάρχει σύνολο  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  με μηδενικό μέτρο Lebesgue ώστε για κάθε  $t \notin \Delta$ ,

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) = \tilde{f}(e^{it}).$$

Αποδειξη στο [fatou.pdf](#).

**Σχολίο** Το θεώρημα Fatou δίνει μια έκφραση για την απεικόνιση  $H^2 \rightarrow \tilde{H}^2 : f \mapsto \tilde{f}$  (και αιτιολογεί την ονομασία «συνοριακή συνάρτηση» για την  $\tilde{f}$ ).

Ο ολοκληρωτικός τύπος Poisson δίνει μια έκφραση για την αντιστροφή απεικόνιση  $\tilde{H}^2 \rightarrow H^2 : \tilde{f} \mapsto f$ .

# Υπενθυμιση: Φραγμαμενοι τελεστες

Έστω  $(E, \|\cdot\|_E)$  και  $(F, \|\cdot\|_F)$  χώροι με νόρμα.

*Παρατήρηση.* Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια **σε όλον το χώρο**.

## Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν

(είναι φραγμένος στην  $\text{ball}(E)$ , δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$ : ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει  $M$  ώστε **για κάθε  $x \in E$**  να ισχύει  $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ .

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν  $T$  γραμμική,

φραγμένη  $\iff$  συνεχής  $\iff$  ομοιόμορφα συνεχής.

## Ορισμός

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή  $A : E \rightarrow E$  σ' έναν χώρο Banach  $E$  είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{o } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο} \}.$$

**Ισχύει ότι** το φάσμα  $\sigma(A)$  είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και ότι

$$\sigma(A) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\| \}.$$

## Πρόταση

Ένας φραγμένος τελεστής  $T : E \rightarrow F$  μεταξύ χωρών Banach είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει  $m > 0$  ώστε  $\|Tx\| \geq m\|x\|$  για κάθε  $x \in E$  (λέμε «ο  $T$  είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ »).

## Ορισμός

Έστω  $A \in \mathcal{B}(E)$  ( $E$ : Banach). Το **σημειακό φάσμα**:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το **προσεγγιστικά σημειακό φάσμα**  $\sigma_a(A)$  είναι το σύνολο των  $\lambda$  ώστε ο  $A - \lambda I$  να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)** είναι το σύνολο

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \neq E\}.$$

## Πρόταση

Η ένωση  $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$  ισούται με  $\sigma(A)$ .

Υπενθυμιση: Ο συζυγής τελεστής.

Αν  $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  ( $H_i$ : Hilbert), υπάρχει μοναδικός  $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$  ώστε

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^*y \rangle_1 \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

## Λήμμα

Έστω  $\mathcal{H}$  χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Τότε

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \quad \text{και} \quad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

## Λήμμα

Εστω  $\mathcal{H}$  χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Τότε

(i)  $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

(ii) Αν  $\exists A^{-1}$ , τότε  $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$ .

(ii)  $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$  και  $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$ .

- Αν  $\dim H < \infty$  τότε  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ . Αλλιώς, μπορεί  $\sigma_p(A) = \emptyset$ .
- Ο αριθμός  $\lambda \in \mathbb{C}$  είναι στο  $\sigma_a(A)$  αν-ν υπάρχει  $m > 0$  ώστε  $\|(A - \lambda I)x\| \geq m \|x\|$  για κάθε  $x \in H$ , αν-ν ο  $A - \lambda I$  είναι 1-1 και έχει κλειστο σύνολο τιμών.

## Παράδειγμα

Αν  $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$  είναι ο τελεστής της μετατόπισης  $Se_n = e_{n+1}$ , τότε

$$\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma_c(S) = \sigma_p(S^*) = \mathbb{D}, \quad \sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}.$$

## Υπενθύμιση: χώροι $L^p$

Αν  $p \in [1, \infty)$ , με το σύμβολο  $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  εννοούμε το σύνολο των μετρήσιμων *συναρτήσεων*  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \quad (\text{μέτρο Lebesgue}).$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dm(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι  $\|f\|_p = 0$  αν και μόνον αν  $f(t) = 0$  *m-σχεδόν για κάθε t*.

## Υπενθύμιση: χώροι $L^p$ (II)

Με  $L^p(\mathbb{T})$  συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας  $[f]$ , των  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ , modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο  $L^p(\mathbb{T})$  είναι γραμμικός χώρος και η  $\|\cdot\|_p$  είναι νόρμα στον  $L^p(\mathbb{T})$  ως προς την οποία ο  $L^p(\mathbb{T})$  είναι **χώρος Banach** (Θεώρημα Riesz-Fisher).

Αν  $1 \leq p \leq q < \infty$  και  $f$  μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty, \quad \text{άρα } C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Αν  $g \in L^1(\mathbb{T})$  γράφω  $\hat{g}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) e^{-ikt} dm(t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ο **μετασχηματισμός Fourier**  $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z}) : g \mapsto (\hat{g}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  είναι γραμμική, 1-1 και συνεχής (όχι επί).<sup>3</sup>

Ο περιορισμός του,  $\mathcal{F}$ , στον  $L^2(\mathbb{T})$  ικανοποιεί  $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{\ell^2}$  και απεικονίζει την  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  στην  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ , άρα απεικονίζει τον  $L^2(\mathbb{T})$  ισομετρικά και επί του  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

---

<sup>3</sup> $\ell^1$  is separable,  $L^\infty$  is not.

## Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  είναι χώρος μέτρου, μία  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ανήκει στον  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$  αν (α) είναι  $\mathcal{S}$ -μετρήσιμη και (β) είναι **ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded)**, δηλ. υπάρχει  $M < +\infty$  ώστε  $|f(x)| \leq M$  σχεδόν παντού, δηλ.  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$ .

Ο μικρότερος τέτοιος  $M$  (υπάρχει και) λέγεται το **ουσιώδες φράγμα (essential supremum)** της  $|f|$ .

Δηλ. ορίζουμε

$$\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Αν  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ , τότε

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ ανν } f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X.$$

Ο  $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$  είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα  $\mu$ -σχεδόν παντού, συναρτήσεων του  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ .

Η  $\|\cdot\|_\infty$  είναι νόρμα στον  $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ , που γίνεται χωρος Banach με τις πράξεις κατά σημείο. Μαλιστα  $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$  (άλγεβρα Banach).

Εστω  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ . Για καθε  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , η συναρτηση  $\phi f$  είναι μετρησιμη και  $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$ . Συνεπως:

## Πρόταση

*Καθε  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  οριζει φραγμενο τελεστη*

$$M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f.$$

*Μαλιστα  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty = \text{esssup}|\phi|$ .*

## Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+) = \{x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$ :

Για  $x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^2$   
ορίζω  $S$  και  $S'$ :

$$S(x(0), x(1), x(2), \dots) = (0, x(0), x(1), \dots)$$

$$S'(x(0), x(1), x(2), \dots) = (x(1), x(2), x(3), \dots)$$

$$\text{δηλαδή } (Sx)(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ x(n-1) & \text{αν } n > 0 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$(S'x)(n) = x(n+1) \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Προφανώς  $S, S' : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ , γραμμικοί και φραγμενοι.

Δειχνουμε οτι  $\langle Sx, y \rangle = \langle x, S'y \rangle$  για καθε  $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ , δηλ. οτι ο συζυγής του  $S$  είναι ο  $S'$ .

## Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$ :

Για  $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$   
ορίζω  $W$  και  $W'$ :

$$Wx = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$W'x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή  $(Wx)(n) = x(n-1)$  και  $(W'x)(n) = x(n+1)$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .

Προφανώς  $W, W' : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ , γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι  $WW' = W'W = I$ , δηλ.  $W^{-1} = W'$ .

Ο συζυγής του  $W$  είναι ο  $W'$ . Άρα  $WW^* = W^*W = I$ .

## Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Τελεστές μετατόπισης ( $\alpha$ ) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$  (αλλιώς):

$$We_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

και  $W'e_n := e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z})$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -ισομετρικές, άρα επεκτείνονται σε ισομετρικές  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ . Δείχνουμε ότι  $\langle W'e_n, e_m \rangle = \langle e_n, We_m \rangle$  για κάθε  $n, m \in \mathbb{Z}$ , άρα  $W' = W^*$  (γιατί;).

- ( $\beta$ ) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :

$$Se_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

και  $S'e_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ.  $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$  για κάθε  $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ ), άρα επεκτείνονται σε συστολές  $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ . Δείχνω  $S' = S^*$ .  
(Μάλιστα ο  $S$  είναι ισομετρία. Ο  $S^*$ ;) )

# Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

Συμπέρασμα

Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :  $We_n = e_{n+1}$  (μετατόπιση δεξιά)

$W^*e_n = e_{n-1}$  (μετατόπιση αριστερά) ( $n \in \mathbb{Z}$ )

Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :  $Se_n = e_{n+1}$  (μετατόπιση δεξιά) ( $n \in \mathbb{Z}_+$ )

$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases}$  (μετατόπιση αριστερά)

• Ο  $W$  είναι ισομετρία και επι.

Ισχύει  $W(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  αλλά  $W^*(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \not\subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

• Ο  $S$  είναι ισομετρία, όχι επι. Ο  $S^*$  είναι επι, όχι 1-1.

## Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$$S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+):$$

$$\text{Αφου } \|S^*\| = 1, \text{ εχω } \sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}.$$

Δειχνω οτι

- $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$ : για καθε  $\lambda \in \mathbb{D}$ , αν  $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ , εχω  $x_\lambda \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  και  $S^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$ .

Επειται οτι

- $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$ .

Ομως

- $\sigma_p(S) = \emptyset$ .

## Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}):$$

$$\text{Πάλι } \sigma(W^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}.$$

$$\text{Ομως } \sigma(W^*) = \sigma(W^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(W) \right\}.$$

Συνεπώς αν  $\lambda \in \sigma(W^*)$  πρέπει  $|\lambda| \leq 1$  και  $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$  αφού  $\sigma(W) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ .

Άρα  $|\lambda| = 1$ . Δηλαδή  $\sigma(W^*) \subseteq \mathbb{T}$ .

$$\text{Άσκηση: } \sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}.$$

$$\text{Άσκηση: } \sigma_p(W) = \emptyset.$$

## Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος  $E \subseteq H$  είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από έναν φραγμένο τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  αν  $A(E) \subseteq E$ , δηλ. αν  $Ax \in E$  για κάθε  $x \in E$ . Τότε ο κλειστός υπόχωρος  $\overline{E}$  είναι και αυτός  $A$ -αναλλοίωτος. Όταν και ο  $E$  και ο  $E^\perp$  είναι  $A$ -αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος  $E$  **ανάγει (reduces)** τον  $A$ .

### Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος  $E$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος αν και μόνον αν  $AP = PAP$  (όπου  $P = P_E$ , η **ορθη προβολή στον  $E$**  (4)).  
Ο  $E$  **ανάγει τον  $A$**  αν και μόνον αν  $A(E) \subseteq E$  και  $A^*(E) \subseteq E$ , **ισοδύναμα** αν και μόνον αν  $AP = PA$ .

Ενημερωτικά, το ακολουθιο είναι ανοικτο:

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής  $A$  σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert  $H$  (ισοδύναμα, στον  $\ell^2$ ) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;

## Αναλλοίωτοι υπόχωροι του shift $S$

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , θετούμε

$$\begin{aligned} E_n &:= \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) : x = (0, \dots, 0, x(n), \dots)\} = \overline{\text{span}}\{e_k : k \geq n\} \\ &= \{e_k : 0 \leq k < n\}^\perp = \{e_0, S(e_0), \dots, S^{n-1}(e_0)\}^\perp. \end{aligned}$$

Ο  $E_n$  είναι (γνησιος)  $S$ -αναλλοιωτος υποχωρος.

Επισης για κάθε  $\lambda \in \mathbb{D}$  ο υποχωρος

$$E(\lambda) := \{x_\lambda\}^\perp \quad \text{οπου } x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

είναι  $S$ -αναλλοιωτος. **Άσκηση:** Το ίδιο και ο

$$E_n(\lambda) := \{x_\lambda, S(x_\lambda), \dots, S^{n-1}(x_\lambda)\}^\perp.$$

# The (unilateral) shift $S$ on $\ell^2$ and $T_1$ on $H^2$

$$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \quad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

$$T_1 : H^2 \rightarrow H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \quad f \in H^2$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ H^2 & \xrightarrow{T_1} & H^2 \end{array} \quad : \quad T_1 = V S V^{-1}$$

οπου  $V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2 : e_n \mapsto \zeta_n$  (εδω  $\zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}$ ).

## $T_1$ -Αναλλοιωτοι υποχωροι

Αν  $E_m = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq m\}$ ,

ο  $V(E_m)$  είναι  $T_1$ -αναλλοιωτος και

$$V(E_m) = \{f \in H^2 : f^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k < m\} = \{\zeta_m f : f \in H^2\}.$$

Επισης αν  $\lambda \in \mathbb{D}$  και  $E(\bar{\lambda}) = \{x_{\bar{\lambda}}\}^\perp$ , ο υποχωρος

$$V(E(\bar{\lambda})) = \{k_\lambda\}^\perp = \{f \in H^2 : f(\lambda) = 0\}$$

είναι  $T_1$ -αναλλοιωτος.

**Άσκησης** Για καθε  $\lambda \in \mathbb{D}$ , τα διανυσματα  $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \dots, \}$  είναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμικη τους θηκη ισουται με  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ .

# The (bilateral) shift $W$ on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and $M_1$ on $L^2(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \\ f_n &\mapsto e_n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{W} & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathcal{F} \uparrow & & \uparrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{M_1} & L^2(\mathbb{T}) \end{array}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}),$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \mathcal{F}| \uparrow & & \uparrow \mathcal{F}| \\ \tilde{H}^2 & \xrightarrow{T_1} & \tilde{H}^2 \end{array}$$

$$T_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

## Αναγοντες (reducing) υποχωροι των shifts

### Πρόταση

Οι μονοι κλειστοι υποχωροι του  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  που αναγουν τον  $S$  ειναι ο  $\{0\}$  και ο  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ .

### Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος  $E$  του  $\ell^2(\mathbb{Z})$  αναγει τον  $W$  αν-ν υπαρχει μετρησιμο  $\Omega \subseteq \mathbb{T}$  ωστε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(E) &= \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{it}) = 0 \text{ σχεδον για καθε } e^{it} \notin \Omega\} \\ &= \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}.\end{aligned}$$

Αλλιως: Ενας κλειστος υποχωρος του  $L^2(\mathbb{T})$  αναγει τον  $M_1$  αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}$$

οπου  $\Omega \subseteq \mathbb{T}$  μετρησιμο.

# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $M_1$

## Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος του  $L^2(\mathbb{T})$  αναγει τον  $M_1$  αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T})$$

οπου  $\Omega \subseteq \mathbb{T}$  μετρησιμο.

## Θεώρημα

Ενας κλειστος υποχωρος  $E$  του  $L^2(\mathbb{T})$  ειναι  $M_1$ -αναλλοιωτος αλλα δεν αναγει τον  $M_1$  αν-ν ειναι της μορφης

$$E = \{\phi g : g \in \tilde{H}^2\} = \phi \tilde{H}^2$$

οπου  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  με  $|\phi(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

Εναλλακτικη αποδειξη στο nonred.pdf.

Καθοριζεται μοναδικα η  $\phi$  απο τον  $E$ ;

# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $M_1$ και του $S$

## Πρόταση («Μοναδικότητα»)

Αν  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$  με  $|\phi(e^{it})| = 1 = |\psi(e^{it})|$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ ,  
τοτε

$$\phi \tilde{H}^2 = \psi \tilde{H}^2 \iff \exists c \in \mathbb{T} : \phi = c\psi.$$

## Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε **μη μηδενικός**  $T_1$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος  $E$  του  $\tilde{H}^2$   
ειναι της μορφης  $E = \psi \tilde{H}^2$  οπου  $\psi \in \tilde{H}^2$  και  $|\psi(e^{it})| = 1$  σχεδον για  
καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

## Πρόταση

Εστω  $\phi \in H^2$ . Αν  $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ , τοτε η  $\phi$  ειναι  
φραγμανη στον  $\mathbb{D}$  (δηλ.  $\phi \in H^\infty$ ).

# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $S$

## Ορισμός

Μια  $\phi \in H^2$  λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν  $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

## Παρατήρηση

Αν  $\phi$  εσωτερικη, ο κλειστος υποχωρος  $\tilde{\phi}\tilde{H}^2 \subseteq \tilde{H}^2$  ειναι  $T_1$ -αναλλοιωτος.

## Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος  $T_1$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος  $E$  του  $\tilde{H}^2$  ειναι της μορφης  $E = \tilde{\phi}\tilde{H}^2$  οπου  $\phi$  εσωτερικη.

Αν  $\phi H^2 = \psi H^2$  με  $\psi$  εσωτερικη, τοτε υπαρχει  $c \in \mathbb{T}$  ωστε  $\psi = c\phi$ .

Συνηθως λεμε «καθε μη μηδενικος  $S$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του  $H^2$  ειναι της μορφης  $\phi H^2$  οπου  $\phi$  εσωτερικη». :

# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $S$

$$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \quad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

$$T_1 : H^2 \rightarrow H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \quad f \in H^2.$$

$$V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2 : e_n \mapsto \zeta_n \quad (\text{\textepsilon}\delta\omega \quad \zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}).$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ H^2 & \xrightarrow{T_1} & H^2 \end{array}$$

Αν  $\{0\} \neq E \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  κλειστος υποχωρος,

$$S(E) \subseteq E \iff T_1(V(E)) \subseteq V(E) \iff V(E) = \phi H^2, \quad \phi \text{ εσωτ.}$$

# Εσωτερικές και εξωτερικές συναρτήσεις

## Πρόταση

Καθε  $T_1$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος  $E$  του  $H^2$  είναι  $T_1$ -κυκλικος, δηλ. υπαρχει  $\phi \in E$  ωστε

$$E = \overline{\text{span}}\{T_1^n(\phi) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

## Ορισμός

Μια  $\phi \in H^2$  λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν

$$|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1 \quad \text{σχεδον για καθε } e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Μια  $F \in H^2$  λεγεται **εξωτερικη (outer function)** αν ο  $T_1$ -κυκλικος υποχωρος που παραγει είναι ολος ο  $H^2$ , δηλαδη

$$\overline{\text{span}}\{T_1^n(F) : n \in \mathbb{Z}_+\} = H^2.$$

## Πρόταση

Μια εξωτερικη συναρτηση δεν εχει καμμια ριζα στον  $\mathbb{D}$ .

# Εσωτερικές και εξωτερικές συναρτησεις

Υπενθ: Οι ριζες μιας  $\neq 0$  ολομορφης συναρτησης στον  $\mathbb{D}$  αποτελουν «μικρο» συνολο: δεν εχουν σημεια συσσωρευσης στο  $\mathbb{D}$ .

## Θεώρημα (F. και M. Riesz)

Αν  $f \in H^2$  μη μηδενικη, το συνολο  $\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$  εχει μετρο (Lebesgue) μηδεν.

## Θεώρημα (Inner-Outer factorization)

Αν  $f \in H^2$  μη μηδενικη, υπαρχει εσωτερικη  $\varphi$  και εξωτερικη  $F$  ωστε  $f = \varphi F$ .

Αν επισης  $f = \varphi' F'$  με  $\varphi'$  εσωτερικη και  $F'$  εξωτερικη τοτε  $\varphi' = c\varphi$  οπου  $c \in \mathbb{T}$  (και αρα  $F = cF'$ ).

• Επομενωσ οι ριζες μιας μη μηδενικης  $f \in H^2$  ειναι ακριβωσ οι ριζες του εσωτερικου της παραγοντα.

# Εσωτερικές συναρτησεις: Γινομενα Blaschke

**Υπενθ.** Για καθε  $z_0 \in \mathbb{D}$ , ο υποχωρος

$$E_{z_0} := \{f \in H^2 : f(z_0) = 0\} = \{k_{z_0}\}^\perp$$

του  $H^2$  ειναι  $T_1$ -αναλλοιωστος .

## Πρόταση

Για καθε  $z_0 \in \mathbb{D}$  η συναρτηση

$$\psi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$$

ειναι εσωτερικη και  $E_{z_0} = \psi H^2$ .

## Πρόταση

Αν  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  η συναρτηση

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$$

ειναι εσωτερικη και

$$\psi H^2 = \{f \in H^2 : f(z_1) = f(z_2) = \dots = f(z_n) = 0\}.$$

## Πόρισμα

Εστω  $\phi$  εσωτερική συναρτηση που έχει ριζες στα  $\{0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$  όπου το 0 είναι ρίζα με πολλαπλότητα  $s \geq 0$ . Αν

$$\psi(z) := z^s \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$$

τότε

$$\phi(z) = \psi(z)S(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου η  $S$  είναι εσωτερική συναρτηση (όπως και η  $\psi$ ).

## Θεώρημα

Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο (:τοπος (region)) και  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

(a)  $f = 0$ .

(b) Υπαρχει  $a \in G$  ωστε  $f^{(n)}(a) = 0$  για καθε  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

(c) Το συνολο  $Z(f) = \{a \in G : f(a) = 0\}$  εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο  $G$ .

Ενα συνολο  $G \subseteq \mathbb{C}$  λεγεται **συνεκτικο** αν δεν περιεχει μη τετριμενα (σχετικα) ανοικτο-κλειστα (clopen) υποσυνολα. Αν  $G$  ανοικτο, ειναι συνεκτικο αν-ν καθε δυο σημεια του συνδεονται με συνεχη καμπυλη που δεν βγαινει απ το  $G$ . Παραδειγμα, ο δισκος  $\mathbb{D}$ . Μη παραδειγμα: η ενωση δυο ξενων ανοικτων δισκων, πχ  $\mathbb{D} \cup B(3, 1)$ .

# Υπενθυμίσεις Μιγαδικής Αναλυσης

## Πόρισμα (Αρχη της ταυτοτητας)

Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφες. Εστω  $S := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$ . Αν το  $S$  εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο  $G$ , τότε  $f = g$ .

## Παρατήρηση (Τοπος: αναγκαιο)

Εστω  $G = D_1 \cup D_2 \subseteq \mathbb{C}$  η ενωση δυο ξενων ανοικτων δισκων και

$$f : G \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} 1, & z \in D_1 \\ 0, & z \in D_2 \end{cases}$$

η χαρακτηριστικη του  $D_1$ . Η  $f$  είναι ολομορφη, μη σταθερη, παιρνει πραγματικες μονο τιμες, εχει υπεραριθμησιμο συνολο ριζων.

## Πόρισμα

*Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη και μη μηδενικη. Τότε οι ριζες της ειναι μεμονωμενες: δηλ. γυρω απο καθε ριζα  $a$  υπαρχει μια περιοχη  $B(a, r)$  ωστε η  $f$  να μην μηδενιζεται πουθενα στο  $B(a, r) \setminus \{a\}$ .*

*Επισης οι ριζες εχουν πεπερασμενη πολλαπλοτητα: υπαρχει  $m \in \mathbb{N}$  ωστε  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  οπου  $g$  ολομορφη στο  $G$  και  $g(a) \neq 0$ .*

## Θεώρημα (Αρχη μεγιστου)

Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Αν υπαρχει  $a \in G$  ωστε  $|f(a)| \geq |f(z)|$  για καθε  $z \in G$ , τοτε η  $f$  ειναι σταθερη.

Δες μια αποδειξη στο [max.pdf](#)

## Πόρισμα

Αν  $\phi \in H^\infty$  ειναι εσωτερικη συναρτηση, μη σταθερη, τοτε  $|\phi(z)| < 1$  για καθε  $z \in \mathbb{D}$ .

## Απόδειξη.

Απο τον τυπο του Poisson (21) εχουμε  $|\phi(z)| \leq 1$  για καθε  $z \in \mathbb{D}$  (γιατι  $\|P_r\|_1 = 1$ ). Αν υπηρχε  $z$  στον  $\mathbb{D}$  ωστε  $|\phi(z)| = 1$  τοτε η  $\phi$  θα ηταν σταθερη απο την αρχη του μεγιστου. □

Θα χρειασθει το

**Θεώρημα (Hurwitz - Ειδικη περιπτωση)**

*Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $g_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφες ( $n \in \mathbb{N}$ ). Υποθετουμε οτι  $g_n(z) \rightarrow g(z)$  ομοιομορφα ως προς  $z$  στα συμπαγη υποσυνολα του  $G$ . Αν καθε  $g_n$  δεν εχει καμμια ριζα στο  $G$  τοτε ή η  $g$  δεν εχει καμμια ριζα στο  $G$ , ή αλλιως ειναι η μηδενικη συναρτηση.*

## Πρόταση

Εστω  $\phi$  εσωτερικη συναρτηση με  $\phi(0) \neq 0$ . Υποθετουμε οτι η  $\phi$  μηδενιζεται στα σημεια  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Τότε

$$|\phi(0)| \leq \prod_{i=1}^n |z_i| \text{ για καθε } n \in \mathbb{N}.$$

Πότε μια απειρη ακολουθια  $(z_n)$  σημειων του δισκου μπορει να αποτελειται απο ριζες μιας  $f \in H^2$ ; Αναγκαια συνθηκη (αρχη μεγιστου) ειναι η  $\lim_n |z|_n = 1$ . Αρκει;

## Παράδειγμα

Δεν υπαρχει  $f \in H^2$  με συνολο ριζων  $Z(f) = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Ορισμός (Συγκλιση απειρογινομενων)

- Εστω  $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Αν τα μερικα γινόμενα  $p_n := \prod_{i=1}^n w_i$  συγκλινουν σε ενα  $p \neq 0$  λεμε οτι το  $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$  **συγκλινει (στο  $p$ )**.
- Εστω  $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C}$ . Αν καποια  $w_k$  μηδενιζονται, και υπαρχει  $N$  ωστε  $w_n \neq 0$  για καθε  $n \geq N$  και το  $\prod_{i=N}^{\infty} w_i$  συγκλινει (σε καποιο  $p \neq 0$ ), τοτε λεμε οτι το  $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$  **συγκλινει στο 0**.

## Πρόταση

Εστω  $f \in H^2$  μη μηδενικη συναρτηση. Αν  $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  και η  $f$  μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ , τοτε το  $\prod_{i=1}^{\infty} |z_i|$  συγκλινει (σε ενα  $p \neq 0$ ).

## Παρατήρηση

Αν  $r_k \in (0, 1)$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , το απειρογινόμενο  $\prod_{i=1}^{\infty} r_i$  συγκλίνει (σε  $p > 0$ ) αν-ν η σειρά  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - r_i)$  συγκλίνει.

## Πόρισμα

Εστω  $f \in H^2$  μη μηδενική συναρτηση. Αν  $z_n \in \mathbb{D}$  και η  $f$  μηδενίζεται (τουλάχιστον) στα σημεία  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ , τότε  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$ .

Θα δούμε ότι αντιστρόφα, αν  $\{z_n\} \subseteq \mathbb{D}$  με  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$  τότε υπάρχει  $f \in H^2$  (μαάλιστα, εσωτερική) που έχει ακριβώς αυτές τις ρίζες.

## Θεώρημα

Εστω  $(z_k)$  ακολουθια στο  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  με  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$ . Τότε υπαρχει μια εσωτερικη συναρτηση  $B_0$  που εχει συνολο ριζων  $Z(B_0) = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Για καθε  $z \in \mathbb{D}$ , εχουμε

$$B_0(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}.$$

οπου το απειρογινόμενο συγκλινει ομοιομορφα στα συμπαγη του  $\mathbb{D}$ . Μαλιστα, η πολλαπλοτητα καθε ριζας  $\hat{z} \in Z(B)$  ειναι ιση με το πληθος των παραγοντων του γινομενου στους οποιους το  $\hat{z}$  εμφανιζεται.

*Σχολιο.* Η συγκλιση του απειρογινομενου σημαινει οτι, για καθε συμπαγες υποσυνολο  $K$  του  $\mathbb{D}$ , μονον πεπερασμενο πληθος ορων του απειρογινομενου εχει ριζες στο  $K$  και οτι το απειρογινομενο που αποτελειται απο τους υπολοιπους ορους συγκλινει ομοιομορφα στο συμπαγες  $K$  σε μια ολομορφη συναρτηση που δεν εχει καμια ριζα στο  $K$ .

## Ορισμός

Εστω  $\{z_k\} \subseteq \mathbb{D} \setminus \{0\}$  με  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$  και  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Το γινόμενο Blaschke με ριζες στα  $\{z_k\}$  και ριζα πολλαπλοτητας  $s$  στο  $z = 0$  είναι η συναρτηση

$$B(z) := z^s \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}.$$

## Παρατήρηση

- Το απειρογινόμενο συγκλίνει για κάθε  $z \in \mathbb{D}$ .
- Η  $B$  είναι εσωτερική συναρτηση.
- Οι ριζες της  $B$  είναι ακριβώς τα σημεία  $\{z_k\}$  (με τις πολλαπλοτητες που εμφανίζονται) καθώς και το 0 με πολλαπλοτητα  $s$ .

Αποδειξεις στο [blaschke26.pdf](#)