




Ο χώρος Hilbert του Hardy  
και οι τελεστές του

<https://eclass.uoa.gr/courses/MATH797/>

Χειμερινό Εξάμηνο 2023

-  Rubén A. Martínez-Avendaño and Peter Rosenthal.  
*An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*, volume 237 of *Graduate Texts in Mathematics*.  
Springer, New York, 2007.
-  Vern I. Paulsen and Mrinal Raghupathi.  
*An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, volume 152 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*.  
Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
-  Nikolai K. Nikolski.  
*Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1*, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*.  
American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.  
Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by  
Andreas Hartmann.

# Πρελουδίο: Η εκθετική συνάρτηση

1. Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ , ορίζουμε

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Η σειρά συγκλίνει απολυτά για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και ομοιομορφα σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Συνεπώς η συνάρτηση  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής.

2. Αποδεικνύεται από την απολυτή συγκλίση της σειράς ότι

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Ορίζουμε  $e := \exp(1)$ .

Έχουμε  $e^x = \exp(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Η μιγαδική παραγωγός

$$\exp'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$

υπάρχει για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και ισούται με  $\exp(z)$ .

# Η εκθετική συνάρτηση

4. Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  έχουμε  $\exp(z)\exp(-z) = 1$  αρα  $\exp(z) \neq 0$ .
5. Ο περιορισμός της  $\exp$  στην ευθεία  $\mathbb{R}$  είναι γνησίως αυξουσα συνάρτηση που απεικονίζει το  $\mathbb{R}$  ομοιομορφικά επί του  $\mathbb{R}_+$ .
6. Για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  έχουμε  $|e^{it}| = 1$  δηλαδή  $e^{it} \in \mathbb{T}$ . Ορίζουμε

$$\cos t := \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \sin t := \operatorname{Im}(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

αρα

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

και επεται οτι οι  $\cos$  και  $\sin$  είναι παραγωγισιμες συναρτησεις  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$\cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$

# Η εκθετική συνάρτηση

- 7. Υπαρχει θετικος αριθμος  $\pi$  ωστε  $e^{i\pi/2} = i$   
και  $e^z = 1$  αν-ν  $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$ .
- 8. Η  $\exp$  ειναι περιοδικη συναρτηση με περιοδο  $2\pi i$ .
- 9. Η  $y \rightarrow e^{iy}$  απεικονιζει το  $\mathbb{R}$  επι του  $\mathbb{T}$ :  
για καθε  $w \in \mathbb{T}$  υπαρχει  $y \in \mathbb{R}$  ωστε  $e^{iy} = w$ .
- 10 Η  $\exp$  απεικονιζει το  $\mathbb{C}$  επι του  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ :  
για καθε  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  υπαρχει  $z \in \mathbb{C}$  ωστε  $e^z = w$ .

## Ο Χώρος $H^2$ του Hardy

Αν  $a_n \in \mathbb{C}$  και  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$  τότε για κάθε  $r \in (0, 1)$  έχουμε  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$  συνεπώς η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  συγκλίνει απολυτα για κάθε  $z \in \mathbb{D}$  και ομοιομορφα σε κάθε δισκο ακτινας  $r < 1$ , αρα οριζει συναρτηση  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  που μαλιστα εχει μιγαδικη παραγωγο (και καθε ταξης), ειναι δηλαδη **ολομορφη** στον ανοικτο δισκο  $\mathbb{D}$ .

### Ορισμός

$$H^2 := \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Η  $(a_n) \mapsto f : \ell^2 \rightarrow H^2$  ειναι γραμμικος ισομορφισμος.<sup>1</sup> Αρα, με το **εσωτερικο γινόμενο**  $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$ , οπου  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  (και νορμα  $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$ ), ο  $H^2$  ειναι **χωρος Hilbert**.

---

<sup>1</sup>Εξπλεϊν Χουαϊ!

## Ορισμός

Έστω  $E$  ένας  $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ ). Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (inner product ή scalar product) στον  $E$  είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i)  $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii)  $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε  $x, x_1, x_2, y \in E$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Η  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$  είναι νόρμα στον  $E$ , άρα η  $d(x, y) := \|x - y\|$  είναι μετρική. Ο  $E$  λέγεται **χώρος Hilbert** αν ο  $(E, d)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.

# Υπενθυμιση: Χώροι Hilbert II

## Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν  $M$  είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

όπου  $M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in M\}$ .

Δηλαδή  $\forall y \in H$  γράφεται μοναδικά  $y = y_M + y_\perp$  όπου  $y_M \in M, y_\perp \in M^\perp$ .

Πυθαγόρειο:  $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$

## Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.



## Θεώρημα (Riesz)

*Έστω  $H$  χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$  υπάρχει μοναδικό  $x \in H$  ώστε*

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } y \in H.$$

# Ο Χωρος $H^2$ του Hardy II

Ο  $H^2$  είναι χωρος (ολομορφων) συναρτησεων  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Μεχρι εκει ομως:

## Παράδειγμα

Η  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  ανηκει στον  $H^2$ , αλλα δεν επεκτεινεται σε μεγαλυτερο δισκο (δεν οριζεται καν οταν  $z = 1 \in \overline{\mathbb{D}}$ ).

## Παράδειγμα

Η  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  (οριζεται και) είναι ολομορφη στο  $\mathbb{D}$ , αλλα δεν ανηκει στον  $H^2$ .

# Ο Χώρος $H^2$ του Hardy III

## Θεώρημα

Για κάθε  $z_0 \in \mathbb{D}$ , η απεικόνιση  $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$  είναι συνεχής. Μαλιστα,  $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$  για κάθε  $f \in H^2$ , όπου  $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$ .

Πρβλ:

## Παρατήρηση

Στον χώρο  $C([0, 1])$  με εσωτ. γινόμενο  $\langle f, g \rangle := \int f(t) \overline{g(t)} dt$  η απεικόνιση  $f \mapsto f(1) : (C([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$  ΔΕΝ είναι συνεχής.

# Ο Χώρος $H^2$ του Hardy III

## Πρόταση

Αν  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  στον  $H^2$ , τότε  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  ομοιομορφα στα συμπαγή υποσυνολα του  $\mathbb{D}$ .

## Ορισμός

Η συναρτηση  $k(z, w) := k_w(z) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$ ,  $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$  λεγεται πυρηνας του Szegő.

Εχουμε  $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$  για καθε  $f \in H^2$ .

# Reproducing Kernel Hilbert Spaces

Εστω  $X$  μη κενό σύνολο (συνήθως  $X \subseteq \mathbb{C}^d$ ). Ένας χώρος  $\mathcal{H}$  λέγεται **Reproducing Kernel Hilbert Space** στο  $X$  όταν

(α) αποτελείται από συναρτήσεις  $X \rightarrow \mathbb{C}$  και είναι γραμμικός χώρος με πράξεις κατά σημείο,

(β) είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο ως προς το οποίο είναι χώρος Hilbert, και

(γ) για κάθε  $z_0 \in X$  η απεικόνιση  $f \mapsto f(z_0) : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$  είναι συνεχής.

Επεται τότε (Θεώρημα Riesz) ότι για κάθε  $z_0 \in X$  υπάρχει  $k_{z_0} \in \mathcal{H}$  ώστε  $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$  για κάθε  $f \in \mathcal{H}$ . Η συνάρτηση

$$k(z, w) := k_w(z) \quad (z, w) \in X \times X$$

λέγεται **πυρήνας αναπαραγωγής (reproducing kernel)** για τον  $\mathcal{H}$ .

## Ο Χώρος $\tilde{H}^2$ του Hardy στον κύκλο $\mathbb{T}$

Θυμίζουμε τον  $L^2(\mathbb{T})$  με εσωτερικο γινόμενο

$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$  και ορθοκανονική βάση  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$

όπου  $f_n(e^{it}) = e^{int}$ . Γραφουμε  $\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Δηλαδή  $\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{mn}$  και για κάθε  $f \in L^2(\mathbb{T})$  έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) f_k \right\|_{L^2} = 0 \quad \text{και} \quad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2.$$

Είναι η  $\|\cdot\|_{L^2}$ -κλειστή θηκή των *τριγ. πολυωνυμικών*  $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

### Ορισμός

$$\tilde{H}^2 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle \tilde{f}, f_n \rangle = 0 \quad \forall n < 0 \right\}.$$

Ο  $\tilde{H}^2$  είναι κλειστός γραμμ. υποχώρος του  $L^2(\mathbb{T})$ . Είναι η  $\|\cdot\|_{L^2}$ -κλειστή θηκή των *αναλυτικών τριγ. πολυωνυμικών*  $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ .

# Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ και ο χωρος $H^2$

$\widetilde{H}^2$ : αποτελείται από (σχ. παντου ορισμενες) συναρτησεις  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$H^2$ : αποτελείται απο συναρτησεις  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Ειναι η  $\|\cdot\|_{H^2}$ - κλειστη θηκη των πολωνυμων  $\text{span}\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$  οπου  $\zeta_k(z) = z^k, z \in \mathbb{D}$ .

Ισομορφισμοι:

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n &\leftrightarrow (a_n) \leftrightarrow \tilde{f} \sim \sum_{n \geq 0} a_n f_n \\ H^2 &\leftrightarrow \ell^2 \leftrightarrow \widetilde{H}^2 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$a_n = \langle \tilde{f}, f_n \rangle$$

# Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ και ο χωρος $H^2$

## Θεώρημα

Αν  $f \in H^2$  με  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ορίζουμε για  $r \in (0, 1)$

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}, \quad e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Τότε  $f_r \in \widetilde{H}^2$  και υπάρχει το

$$\lim_{r \nearrow 1} f_r := \tilde{f} \quad \text{ως προς τη νόρμα του } \widetilde{H}^2$$

οπov  $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$  με  $\langle \tilde{f}, f_n \rangle = a_n \quad \forall n \geq 0$ .

## Πόρισμα

Αν  $f \in H^2$  υπάρχει  $(r_n)$  με  $0 \leq r_n \nearrow 1$  ώστε

$$\lim_n f(r_n e^{it}) = \tilde{f}(e^{it})$$

σχεδov για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .



# Ο Χωρος $H^2$ του Hardy: εναλλακτικός ορισμός

## Θεώρημα

Εστω  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Εχουμε

$$f \in H^2 \iff \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

Μαλιστα

$$f \in H^2 \Rightarrow \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \|f\|^2.$$

## Πόρισμα

Εστω  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Η συναρτηση

$$r \mapsto M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

ειναι αυξουσα στο  $(0, 1)$ . Η  $f$  ανηκει στον  $H^2$  αν-ν η  $r \mapsto M(r)$  ειναι φραγμενη, και τοτε  $\|f\|^2 = \lim_{r \nearrow 1} M(r)$ .

# Ο Χώρος $H^2$ του Hardy V

## Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Αν  $f$  είναι ολομορφη σε ανοικτο συνολο που περιεχει τον κλειστο δισκο  $\overline{\mathbb{D}}$ , τοτε για καθε  $z_0 \in \mathbb{D}$  εχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

## Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος Poisson)

Αν  $f \in H^2$  με αντιστοιχη  $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$  τοτε για καθε  $re^{it} \in \mathbb{D}$  εχουμε

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(s-t) ds$$

οπου  $P_r$  ο πυρηνας Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi].$$

# Υπενθυμιση: Φραγμενοι τελεστες

Έστω  $(E, \|\cdot\|_E)$  και  $(F, \|\cdot\|_F)$  χώροι με νόρμα.

*Παρατήρηση.* Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια **σε όλον το χώρο**.

## Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν

(είναι φραγμένος στην  $\text{ball}(E)$ , δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$ : ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει  $M$  ώστε **για κάθε  $x \in E$**  να ισχύει  $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ .

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν  $T$  γραμμική,

φραγμένη  $\iff$  συνεχής  $\iff$  ομοιόμορφα συνεχής.

## Ορισμός

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή  $A : E \rightarrow E$  σ' έναν χώρο Banach  $E$  είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{o } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο}\}.$$

Το **σημειακο φασμα**  $\sigma_p(A)$  ή  $\Pi_0(A)$  είναι το σύνολο των ιδιοτιμών:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{o } A - \lambda I \text{ δεν είναι 1-1}\}.$$

Το **προσεγγιστικά σημειακο φασμα**  $\sigma_a(A)$  ή  $\Pi(A)$  είναι το σύνολο των  $\lambda \in \mathbb{C}$  για τα οποία υπάρχουν  $x_n \in E$  με  $\|x_n\| = 1$  και  $\lim_n \|(A - \lambda I)x_n\| = 0$ .

**Ισχύει ότι** το φάσμα  $\sigma(A)$  είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ .

Η **φασματική ακτινα** είναι το  $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ .

Εχουμε,  $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A) \subseteq \sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$ .

## Το Φάσμα τελεστή σε χώρο Hilbert

**Συζυγής τελεστής** Αν  $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  ( $H_i$ : Hilbert), υπάρχει μοναδικός  $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$  ώστε

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^*y \rangle_1 \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Εστω  $A \in \mathcal{B}(H)$  ( $H$ : Hilbert).

- Αν  $\|I - A\| < 1$ , ο  $A$  έχει (φρ.) αντιστροφή.
- Αν  $\exists A^{-1}$ , τότε  $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$ .
- $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$ .
- $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$  (αρα  $r(A) \leq \|A\|$ ).
- Αν  $\dim H < \infty$  τότε  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ . Αλλιώς, μπορεί  $\sigma_p(A) = \emptyset$ .
- Ο αριθμός  $\lambda \in \mathbb{C}$  είναι στο  $\sigma_a(A)$  αν-ν υπάρχει  $m > 0$  ώστε  $\|(A - \lambda I)x\| \geq m\|x\|$  για κάθε  $x \in H$ , αν-ν ο  $A - \lambda I$  είναι 1-1 και έχει κλειστό σύνολο τιμών.

## Υπενθύμιση: χώροι $L^p$

Αν  $p \in [1, \infty)$ , με το σύμβολο  $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  εννοούμε το σύνολο των μετρήσιμων *συναρτήσεων*  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \quad (\text{μέτρο Lebesgue}).$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dm(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι  $\|f\|_p = 0$  αν και μόνον αν  $f(t) = 0$  *m-σχεδόν για κάθε t*.

## Υπενθύμιση: χώροι $L^p$ (II)

Με  $L^p(\mathbb{T})$  συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας  $[f]$ , των  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ , modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο  $L^p(\mathbb{T})$  είναι γραμμικός χώρος και η  $\|\cdot\|_p$  είναι νόρμα στον  $L^p(\mathbb{T})$  ως προς την οποία ο  $L^p(\mathbb{T})$  είναι **χώρος Banach** (Θεώρημα Riesz-Fisher).

Αν  $1 \leq p \leq q < \infty$  και  $f$  μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty, \quad \text{άρα } C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Αν  $g \in L^1(\mathbb{T})$  γράφω  $\hat{g}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) e^{-ikt} dm(t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ο **μετασχηματισμός Fourier**  $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z}) : g \mapsto (\hat{g}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  είναι γραμμική, 1-1 και συνεχής (όχι επί).

Ο περιορισμός του,  $\mathcal{F}$ , στον  $L^2(\mathbb{T})$  ικανοποιεί  $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{\ell^2}$  και απεικονίζει την  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  στην  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ , άρα απεικονίζει τον  $L^2(\mathbb{T})$  ισομετρικά και επί του  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

## Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  είναι χώρος μέτρου, μία  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ανήκει στον  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$  αν

- (α) είναι  $\mathcal{S}$ -μετρήσιμη και
- (β) είναι **ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded)**, δηλ. υπάρχει  $M < +\infty$  ώστε  $|f(x)| \leq M$  σχεδόν παντού, δηλ.  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$ .

Ο μικρότερος τέτοιος  $M$  (υπάρχει και) λέγεται το **ουσιώδες φράγμα (essential supremum)** της  $|f|$ .

Δηλ. ορίζουμε

$$\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Αν  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ , τότε

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ ανν } f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X.$$

Ο  $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$  είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα  $\mu$ -σχεδόν παντού, συναρτήσεων του  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ .

Η  $\|\cdot\|_\infty$  είναι νόρμα στον  $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ , που γίνεται άλγεβρα Banach με τις πράξεις κατά σημείο.



Εστω  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ . Για καθε  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , η συναρτηση  $\phi f$  είναι μετρησιμη και  $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$ . Συνεπως:

## Πρόταση

Καθε  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  οριζει φραγμενο τελεστη

$$M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f.$$

Μαλιστα  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty = \text{esssup}|\phi|$ .

## Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$ :

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω  $W$  και  $V$ :

$$Wx = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή  $(Wx)(n) = x(n-1)$  και  $(Vx)(n) = x(n+1)$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .

Προφανώς  $W, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ , γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι  $WV = VW = I$ , δηλ.  $W^{-1} = V$ .

Ο συζυγής του  $W$  είναι ο  $V$ . Άρα  $WW^* = W^*W = I$ .

## Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Τελεστές μετατόπισης ( $\alpha$ ) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$  (αλλιώς):

$$\begin{aligned} We_n &:= e_{n+1} && \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} && \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z})$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -ισομετρικές, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ . Δείχνουμε ότι  $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, We_m \rangle$  για κάθε  $n, m \in \mathbb{Z}$ , άρα  $V = W^*$  (γιατί;).

- ( $\beta$ ) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :

$$\begin{aligned} Se_n &:= e_{n+1} && \text{(μετατόπιση δεξιά)} \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και } S'e_n &:= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} && \text{(μετατόπιση αριστερά)} \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ.  $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$  για κάθε  $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ ), άρα επεκτείνονται σε συστολές  $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ . Δείχνω  $S' = S^*$ .  
(Μάλιστα ο  $S$  είναι ισομετρία. Ο  $S^*$ ;) )

# Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

Συμπέρασμα

Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :  $We_n = e_{n+1}$  (μετατόπιση δεξιά)

$W^*e_n = e_{n-1}$  (μετατόπιση αριστερά) ( $n \in \mathbb{Z}$ )

Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :  $Se_n = e_{n+1}$  (μετατόπιση δεξιά) ( $n \in \mathbb{Z}_+$ )

$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases}$  (μετατόπιση αριστερά)

• Ο  $W$  είναι ισομετρία και επι.

Ισχύει  $W(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  αλλά  $W^*(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \not\subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

• Ο  $S$  είναι ισομετρία, όχι επι. Ο  $S$  είναι επι, όχι 1-1.

## Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$$S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+):$$

Αφου  $\|S^*\| = 1$ , έχω  $\sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ .

Δειχνω οτι

- $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$ : για καθε  $\lambda \in \mathbb{D}$ , αν  $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ , έχω  $x_\lambda \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  και  $S^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$ .

Επεται οτι

- $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$ .

Ομως

- $\sigma_p(S) = \emptyset$ .

## Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ :

Παλι  $\sigma(W^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ . Ομως  $\sigma(W^*) = \sigma(W^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(W)\}$ .

Συνεπως αν  $\lambda \in \sigma(W^*)$  πρεπει  $|\lambda| \leq 1$  και  $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$  αφου  $\sigma(W) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ .

Αρα  $|\lambda| = 1$ . Δηλαδη  $\sigma(W^*) \subseteq \mathbb{T}$ .

**Ασκηση:**  $\sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}$ .

**Ασκηση:**  $\sigma_p(W) = \emptyset$ .

## Πρόταση

Ένας φραγμένος τελεστής  $T : E \rightarrow F$  μεταξύ χωρών Banach είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει  $m > 0$  ώστε  $\|Tx\| \geq m\|x\|$  για κάθε  $x \in E$  (λέμε «ο  $T$  είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ »).

## Ορισμός

Έστω  $A \in \mathcal{B}(E)$  ( $E$ : Banach). Το **σημειακό φάσμα**:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το **προσεγγιστικά σημειακό φάσμα**  $\sigma_a(A)$  είναι το σύνολο των  $\lambda$  ώστε ο  $A - \lambda I$  να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)** είναι το σύνολο

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \neq E\}.$$

## Πρόταση

*Η ένωση  $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$  ισούται με  $\sigma(A)$ .*

## Λήμμα

*Εστω  $\mathcal{H}$  χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Τότε*

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \quad \text{και} \quad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$



## Λήμμα

Εστω  $\mathcal{H}$  χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Τότε

**(i)**  $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

**(ii)**  $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$  και  $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$ .

## Παράδειγμα

Αν  $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$  είναι ο τελεστής της μετατόπισης  $Se_n = e_{n+1}$ , τότε

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \bar{\mathbb{D}}.$$

Αποδειξεις στο [specS.pdf](#).

## Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος  $E \subseteq H$  είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από έναν φραγμένο τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  αν  $A(E) \subseteq E$ , δηλ. αν  $Ax \in E$  για κάθε  $x \in E$ . Τότε ο κλειστός υπόχωρος  $\overline{E}$  είναι και αυτός  $A$ -αναλλοίωτος. Όταν και ο  $E$  και ο  $E^\perp$  είναι  $A$ -αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος  $E$  **ανάγει (reduces)** τον  $A$ .

### Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος  $E$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος αν και μόνον αν  $AP = PAP$  (όπου  $P = P_E$ , η **ορθη προβολή στον  $E$  (??)**). Ο  $E$  ανάγει τον  $A$  αν και μόνον αν  $A(E) \subseteq E$  και  $A^*(E) \subseteq E$ , ισοδύναμα αν και μόνον αν  $AP = PA$ .

Ενημερωτικά, το ακολουθιο είναι ανοικτο:

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής  $A$  σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert  $H$  (ισοδύναμα, στον  $\ell^2$ ) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;

## Αναλλοίωτοι υπόχωροι του shift $S$

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , θετούμε

$$\begin{aligned} E_n &:= \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) : x = (0, \dots, 0, x(n), \dots)\} = \overline{\text{span}}\{e_k : k \geq n\} \\ &= \{e_k : 0 \leq k < n\}^\perp = \{e_0, S(e_0), \dots, S^{n-1}(e_0)\}^\perp. \end{aligned}$$

Ο  $E_n$  είναι (γνησιος)  $S$ -αναλλοιωτος υποχωρος.

Επισης για κάθε  $\lambda \in \mathbb{D}$  ο υποχωρος

$$E(\lambda) := \{x_\lambda\}^\perp$$

είναι  $S$ -αναλλοιωτος. **Άσκηση:** Το ίδιο και ο

$$E_n(\lambda) := \text{span}\{x_\lambda, S(x_\lambda), \dots, S^{n-1}(x_\lambda)\}^\perp.$$

# The (unilateral) shift $S$ on $\ell^2$ and $T_1$ on $H^2$

$$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \quad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$
$$T_1 : H^2 \rightarrow H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \quad f \in H^2$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ H^2 & \xrightarrow{T_1} & H^2 \end{array} \quad : \quad T_1 = V S V^{-1}$$

οπou  $V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2 : e_n \mapsto \zeta_n$  (εδω  $\zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}$ ).

## $T_1$ -Αναλλοιωτοι υποχωροι

Αν  $E_m = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq m\}$ .

ο  $V(E_m)$  είναι  $T_1$ -αναλλοιωτος και

$$V(E_m) = \{f \in H^2 : f^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k < m\} = \{\zeta_m f : f \in H^2\}.$$

Επισης αν  $\lambda \in \mathbb{D}$  και  $E(\bar{\lambda}) = \{x_{\bar{\lambda}}\}^\perp$ , ο υποχωρος

$$V(E(\bar{\lambda})) = \{k_\lambda\}^\perp = \{f \in H^2 : f(\lambda) = 0\}$$

είναι  $T_1$ -αναλλοιωτος.

**Άσκησης** Για καθε  $\lambda \in \mathbb{D}$ , τα διανυσματα  $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \dots, \}$  είναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμικη τους θηκη ισουται με  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ .

# The (bilateral) shift $W$ on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and $M_1$ on $L^2(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \\ f_n &\mapsto e_n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{W} & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathcal{F} \uparrow & & \uparrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{M_1} & L^2(\mathbb{T}) \end{array}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}),$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \mathcal{F}| \uparrow & & \uparrow \mathcal{F}| \\ \tilde{H}^2 & \xrightarrow{T_1} & \tilde{H}^2 \end{array}$$

$$T_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

## Αναγοντες (reducing) υποχωροι των shifts

### Πρόταση

Οι μονοι κλειστοι υποχωροι του  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  που αναγουν τον  $S$  ειναι ο  $\{0\}$  και ο  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ .

### Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος  $E$  του  $\ell^2(\mathbb{Z})$  αναγει τον  $W$  αν-ν υπαρχει μετρησιμο  $\Omega \subseteq \mathbb{T}$  ωστε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(E) &= \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{it}) = 0 \text{ σχεδον για καθε } e^{it} \notin \Omega\} \\ &= \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}.\end{aligned}$$

Αλλιως: Ενας κλειστος υποχωρος του  $L^2(\mathbb{T})$  αναγει τον  $M_1$  αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}$$

οπου  $\Omega \subseteq \mathbb{T}$  μετρησιμο.

Η αποδειξη της Προτασης για τον  $W$  θα χρειασθει προετοιμασια:

## Ο μεταθετης (commutant) του $W$

Να βρούμε όλους τους τελεστες στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$  που μετατιθενται με τον  $W$ .  
Ισοδυναμα, να βρούμε όλους τους τελεστες στον  $L^2(\mathbb{T})$  που μετατιθενται με τον  $M_1 = \mathcal{F}^{-1}W\mathcal{F}$ .

Καθε πολλαπλασιαστικος τελεστης  $M_\phi$  με  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  μετατιθεται με τον (πολλαπλασιαστικο τελεστη)  $M_1$ . Δεν υπαρχουν αλλοι:

### Θεώρημα

Το συνολο των τελεστων στον  $L^2(\mathbb{T})$  που μετατιθενται με τον  $M_1$  ειναι το

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$



# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $M_1$

## Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος του  $L^2(\mathbb{T})$  αναγει τον  $M_1$  αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T})$$

οπου  $\Omega \subseteq \mathbb{T}$  μετρησιμο.

## Θεώρημα

Ενας κλειστος υποχωρος  $E$  του  $L^2(\mathbb{T})$  ειναι  $M_1$ -αναλλοιωτος αλλα δεν αναγει τον  $M_1$  αν-ν ειναι της μορφης

$$E = \{\phi g : g \in \tilde{H}^2\} = \phi \tilde{H}^2$$

οπου  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  με  $|\phi(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$  ωστε

Καθοριζεται μοναδικα η  $\phi$  απο τον  $E$ ;

# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $M_1$ και του $S$

## Πρόταση («Μοναδικότητα»)

Αν  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$  με  $|\phi(e^{it})| = 1 = |\psi(e^{it})|$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ ,  
τοτε

$$\phi \tilde{H}^2 = \psi \tilde{H}^2 \iff \exists c \in \mathbb{T} : \phi = c\psi.$$

## Ορισμός

Μια  $\phi \in H^\infty$  λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν  $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

## Πρόταση

Εστω  $\phi \in H^2$ . Αν  $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ , τοτε η  $\phi$  ειναι εσωτερικη.

## Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος  $T_1$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος  $E$  του  $H^2$  ειναι της μορφης  $E = \phi H^2$  οπου  $\phi$  εσωτερικη.

# Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του $S$

## Ορισμός

Μια  $\phi \in H^\infty$  λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν  $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$  σχεδον για καθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ .

## Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος  $T_1$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος  $E$  του  $H^2$  ειναι της μορφης  $E = \phi H^2$  οπου  $\phi$  εσωτερικη.  
Αν  $\phi \tilde{H}^2 = \psi \tilde{H}^2$  με  $\psi$  εσωτερικη, τοτε υπαρχει  $c \in \mathbb{T}$  ωστε  $\psi = c\phi$ .

## Πρόταση

Καθε  $T_1$ -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος  $E$  του  $H^2$  ειναι  $T_1$ -κυκλικος, δηλ. υπαρχει  $\phi \in E$  ωστε

$$E = \overline{\text{span}}\{T_1^n(\phi) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

(Το  $\phi$  λεγεται **κυκλικο διάνυσμα για τον  $E$** )

## Ορισμός

Μια  $\phi \in H^\infty$  λεγεται **εσωτερική (inner function)** αν

$$|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1 \quad \text{σχεδον για καθε } e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Μια  $F \in H^2$  λεγεται **εξωτερική (outer function)** αν

$$\overline{\text{span}}\{T_1^n(F) : n \in \mathbb{Z}_+\} = H^2.$$

## Πρόταση

Μια εξωτερική συναρτηση δεν εχει καμμία ρίζα στον  $\mathbb{D}$ .

# Εσωτερικές και εξωτερικές συναρτησεις

Υπενθ: Οι ρίζες μιας  $\neq 0$  ολομορφης συναρτησης στον  $\mathbb{D}$  αποτελουν «μικρο» συνολο: δεν εχουν σημεια συσσωρευσης στο  $\mathbb{D}$ .

## Θεώρημα (F. και M. Riesz)

Αν  $f \in H^2$  μη μηδενικη, το συνολο  $\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$  εχει μετρο (Lebesgue) μηδεν.

## Θεώρημα (Inner-Outer factorization)

Αν  $f \in H^2$  μη μηδενικη, υπαρχει εσωτερικη  $\varphi$  και εξωτερικη  $F$  ωστε  $f = \varphi F$ .

Αν επισης  $f = \varphi' F'$  με  $\varphi'$  εσωτερικη και  $F'$  εξωτερικη τοτε  $\varphi' = c\varphi$  οπου  $c \in \mathbb{T}$  (και αρα  $F = cF'$ ).

• Επομενωσ οι ριζες μιας μη μηδενικης  $f \in H^2$  ειναι ακριβωσ οι ριζες του εσωτερικου της παραγοντα.

# Εσωτερικές συναρτησεις: Γινομενα Blaschke

**Υπενθ.** Για καθε  $z_0 \in \mathbb{D}$ , ο υποχωρος

$$E_{z_0} := \{f \in H^2 : f(z_0) = 0\} = \{k_{z_0}\}^\perp$$

του  $H^2$  ειναι  $T_1$ -αναλλοιωστος .

## Πρόταση

Για καθε  $z_0 \in \mathbb{D}$  η συναρτηση

$$\psi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$$

ειναι εσωτερικη και  $E_{z_0} = \psi H^2$ .

## Πρόταση

Αν  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  η συναρτηση

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$$

ειναι εσωτερικη και

$$\psi H^2 = \{f \in H^2 : f(z_1) = f(z_2) = \dots = f(z_n) = 0\}.$$

## Πόρισμα

Εστω  $\phi$  εσωτερική συναρτηση που έχει ριζες στα  $\{0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$  όπου το 0 είναι ρίζα με πολλαπλότητα  $s \geq 0$ . Αν

$$\psi(z) := z^s \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$$

τότε

$$\phi(z) = \psi(z)S(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου η  $S$  είναι εσωτερική συναρτηση (όπως και η  $\psi$ ).

# Υπενθυμισεις Μιγαδικης Αναλυσης

## Θεώρημα

Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο (:τοπος (region)) και  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

(a)  $f = 0$ .

(b) Υπαρχει  $a \in G$  ωστε  $f^{(n)}(a) = 0$  για καθε  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

(c) Το συνολο  $Z(f) = \{a \in G : f(a) = 0\}$  εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο  $G$ .

Ενα συνολο  $G \subseteq \mathbb{C}$  λεγεται **συνεκτικο** αν δεν περιεχει μη τετριμενα (σχετικα) ανοικτο-κλειστα (clopen) υποσυνολα. Αν  $G$  ανοικτο, ειναι συνεκτικο αν-ν καθε δυο σημεια του συνδεονται με συνεχη καμπυλη που δεν βγαινει απ το  $G$ . Παραδειγμα, ο δισκος  $\mathbb{D}$ . Μη παραδειγμα: η ενωση δυο ξενων δισκων, πχ  $\mathbb{D} \cup D(3, 1)$ .

## Πόρισμα (Αρχη της ταυτοτητας)

Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφες. Εστω  $S := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$ . Αν το  $S$  εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο  $G$ , τοτε  $f = g$ .



## Πόρισμα

*Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη και μη μηδενικη. Τότε οι ριζες της ειναι μεμονωμενες: δηλ. γυρω απο καθε ριζα  $a$  υπαρχει μια περιοχη  $D(a, r)$  ωστε η  $f$  να μην μηδενιζεται πουθενα στο  $D(a, r) \setminus \{a\}$ .*

*Επισης οι ριζες εχουν πεπερασμενη πολλαπλοτητα: υπαρχει  $m \in \mathbb{N}$  ωστε  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  οπου  $g$  ολομορφη στο  $G$  και  $g(a) \neq 0$ .*

## Θεώρημα (Αρχη μεγιστου)

*Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη. Αν υπαρχει  $a \in G$  ωστε  $|f(a)| \geq |f(z)|$  για καθε  $z \in G$ , τοτε η  $f$  ειναι σταθερη.*

## Πόρισμα

*Αν  $\phi \in H^\infty$  ειναι εσωτερικη συναρτηση, μη σταθερη, τοτε  $|\phi(z)| < 1$  για καθε  $z \in \mathbb{D}$ .*

## Αποδειξη (απο την ταξη - ευχαριστω!)

Απο τον τυπο του Poisson (??) εχουμε  $|\phi(z)| \leq 1$  για καθε  $z \in \mathbb{D}$  (γιατι  $\|P_r\|_1 = 1$ ). Αν υπηρχε  $z$  στον  $\mathbb{D}$  ωστε  $|\phi(z)| = 1$  τοτε η  $\phi$  θα ηταν σταθερη απο την αρχη του μεγιστου. □

Θα χρειασθει το

## Θεώρημα (Hurwitz)

*Εστω  $G \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτο και συνεκτικο και  $g_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφες ( $n \in \mathbb{N}$ ). Υποθετουμε οτι  $g_n(z) \rightarrow g(z)$  ομοιομορφα ως προς  $z$  στα συμπαγη υποσυνολα του  $G$ . Αν καθε  $g_n$  δεν εχει καμμια ριζα στο  $G$  τοτε ή η  $g$  δεν εχει καμμια ριζα στο  $G$ , ή αλλιως ειναι η μηδενικη συναρτηση.*

## Πρόταση

Εστω  $\phi$  εσωτερική συναρτηση με  $\phi(0) \neq 0$ . Υποθετουμε οτι η  $\phi$  μηδενίζεται στα σημεια  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Τότε

$$|\phi(0)| \leq \prod_{i=1}^n |z_i| \text{ για καθε } n \in \mathbb{N}.$$

Πότε μια απειρη ακολουθια  $(z_n)$  σημειων του δισκου μπορει να αποτελειται απο ριζες μιας  $f \in H^2$ ; Αναγκαια συνθηκη (αρχη μεγιστου) ειναι η  $\lim_n |z|_n = 1$ . Αρκει;

## Παράδειγμα

Δεν υπαρχει  $f \in H^2$  με συνολο ριζων  $Z(f) = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Ορισμός (Συγκλιση απειρογινομενων)

- Εστω  $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Αν τα μερικα γινόμενα  $p_n := \prod_{i=1}^n w_i$  συγκλινουν σε ενα  $p \neq 0$  λεμε οτι το  $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$  **συγκλινει (στο  $p$ )**.
- Εστω  $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C}$ . Αν καποια  $w_k$  μηδενιζονται, και υπαρχει  $N$  ωστε  $w_n \neq 0$  για καθε  $n \geq N$  και το  $\prod_{i=N}^{\infty} w_i$  συγκλινει (σε καποιο  $p \neq 0$ ), τοτε λεμε οτι το  $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$  **συγκλινει στο 0**.

## Πρόταση

Εστω  $f \in H^2$  μη μηδενικη συναρτηση. Αν  $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  και η  $f$  μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ , τοτε το  $\prod_{i=1}^{\infty} |z_i|$  συγκλινει (σε ενα  $p \neq 0$ ).

## Παρατήρηση

Αν  $r_k \in (0, 1)$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , το απειρογινόμενο  $\prod_{i=1}^{\infty} r_i$  συγκλίνει αν-ν  
η σειρά  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - r_i)$  συγκλίνει.

## Πόρισμα

Εστω  $f \in H^2$  μη μηδενική συναρτηση. Αν  $z_n \in \mathbb{D}$  και η  $f$  μηδενίζεται  
(τουλάχιστον) στα σημεία  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ , τότε  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$ .

Θα δούμε ότι αντιστρόφα, αν  $\{z_n\} \subseteq \mathbb{D}$  με  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$  τότε  
υπάρχει  $f \in H^2$  (μαάλιστα, εσωτερική) που έχει ακριβώς αυτές τις ρίζες.

# Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

## Ορισμός

Εστω  $\{z_k\} \subseteq \mathbb{D} \setminus \{0\}$  με  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$  και  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Το γινόμενο Blaschke με ριζες στα  $\{z_k\}$  και ριζα πολλαπλοτητας  $s$  στο  $z = 0$  είναι η συναρτηση

$$B(z) := z^s \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}.$$

## Θεώρημα

- Το απειρογινόμενο που ορίζει την  $B(z)$  συγκλίνει για κάθε  $z \in \mathbb{D}$ .
- Η  $B$  είναι εσωτερική συναρτηση.
- Οι ριζες της  $B$  είναι ακριβώς τα σημεία  $\{z_k\}$  (με τις πολλαπλοτητες που εμφανίζονται) καθώς και το 0 με πολλαπλοτητα  $s$ .

Επομένως, η συνθήκη  $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  με  $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$  είναι ικανή και αναγκαία για την υπαρξη  $f \in H^2$  (μαλιστα, εσωτερικής) με ακριβώς αυτές τις ριζες.

**Σημειωση:** Αν  $Z(B)$  το σύνολο των ριζών της  $B$  και  $s_w$  η πολλαπλότητα της ρίζας  $w$

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(B) \setminus \{0\}} \left( \frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right)^{s_w} .$$

## Παράδειγμα

Υπάρχει  $f \in H^2$  (μαλιστα, εσωτερικη) που δεν επεκτεινεται σε κανενα σημειο της περιφερειας  $\mathbb{T}$  σε ολομορφη συναρτηση.

**Παρατηρηση [Δ.Ε.]** Μαλιστα, δεν επεκτεινεται καν σε συνεχη συναρτηση.



# Singular inner functions (δείτε και το [singinner.pdf](#))

## Ορισμός

Μια εσωτερική συνάρτηση  $\varphi \in H^\infty$  λεγεται **ιδιαιζουσα εσωτερικη συνάρτηση (singular inner function)** αν δεν είναι σταθερή και δεν έχει ρίζες στον  $\mathbb{D}$ .

## Παράδειγμα

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

## Παράδειγμα

$$\varphi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{z+e^{i\theta_k}}{z-e^{i\theta_k}} a_k\right), \quad z \in \mathbb{D} \text{ όπου } a_k > 0 \text{ και } \theta_k \in [0, 2\pi].$$

## Θεώρημα

Μια  $S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι *ιδιαζούσα εσωτερική συναρτησιμότητα* αν-ν είναι της μορφής

$$S(z) = c \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου  $c \in \mathbb{T}$  και  $\mu$  είναι κανονικό θετικό μη μηδενικό μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$  που είναι *καθeto ή ιδιαζόν ως προς το μέτρο Lebesgue*.

(Ένα θετικό μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$  λέγεται *καθeto ή ιδιαζόν* ως προς το μέτρο Lebesgue  $m$  αν είναι συγκεντρωμένο σε ένα  $m$ -μηδενικό σύνολο  $A \subseteq \mathbb{T}$ , αν δηλαδή  $\mu(A^c) = 0$  και  $m(A) = 0$ .)

# Singular inner functions

Θα χρειασθει το ακολουθο Θεωρημα αναπαραστασης:

## Θεώρημα (Herglotz)

Εστω  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφη ωστε  $\operatorname{Re} h(z) > 0$  για καθε  $z \in \mathbb{D}$ . Τότε υπαρχει κανονικο θετικο μετρο Borel  $\mu$  στον  $\mathbb{T}$  ωστε

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) + i \operatorname{Im}(h(0)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

## Λήμμα

Εστω  $\mu$  κανονικο θετικο μετρο Borel στον  $\mathbb{T}$ . Οριζουμε

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Τότε η  $F$  ειναι ολομορφη στο  $\mathbb{D}$ .

Αποδειξεις στο [singinner.pdf](#)

## Πρόταση

Καθε εσωτερική συνάρτηση  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  παραγοντοποιείται ως  $\phi = BS$ , όπου  $B$  είναι το γινόμενο Blaschke

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(\phi) \setminus \{0\}} \left( \frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right)^{s_w}, \quad z \in \mathbb{D}$$

που ορίζεται από το σύνολο  $Z(\phi)$  των ριζών της  $\phi$  (με την πολλαπλότητα  $s_w$  της καθέμιας) και  $S$  είναι ιδιαίτερη εσωτερική συνάρτηση της μορφής

$$S(z) = c \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου  $c \in \mathbb{T}$  και  $\mu$  είναι κανονικό θετικό μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$  που είναι κάθετο (ή ιδιαίτερο) ως προς το μέτρο Lebesgue.

# Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Υπενθυμιση (Θ. Beurling):  $\text{Lat}(S) = \{ \phi H^2 : \phi \text{ εσωτερικη} \}$ .

## Παράδειγμα

Για  $a \in [0, 1]$  θετουμε  $\phi_a(z) := \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ . Εχουμε

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \Rightarrow \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = H^2.$$

Δηλαδή η απεικονιση  $[0, 1] \rightarrow \text{Lat}(S) : a \mapsto \phi_a$  (ειναι 1-1 και) διατηρει τη διαταξη.

Θα δουμε σε λιγο οτι η συνεπαγωγη  $\Rightarrow$  ειναι στην πραγματικοτητα ισοδυναμια  $\Leftrightarrow$ .

Δηλαδή ο συνδεσμος  $\text{Lat}(S)$  εχει υποσυνδεσμους ισομορφους ως προς τη διαταξη με το  $[0, 1]$  (με τη φυσιολογικη του διαταξη).

# Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

## Πρόταση

Θεωρούμε δυο εσωτερικές συναρτησεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$ . Τότε έχουμε  $\phi_1 H^2 \subseteq \phi_2 H^2$  αν-ν η  $\phi_1/\phi_2$  είναι εσωτερική συναρτηση.

Αυτο συμβαίνει αν-ν

- κάθε ρίζα  $z$  της  $\phi_2$  είναι ρίζα της  $\phi_1$  με την ίδια ή μεγαλύτερη πολλαπλοτητα ( $\text{mult}_1(z) \geq \text{mult}_2(z)$ ) και
- έχουμε  $\mu_2(E) \leq \mu_1(E)$  για κάθε Borel  $E \subseteq \mathbb{T}$ , όπου  $\mu_i$  είναι το ιδιαίζον μετρο που αντιστοιχεί στην  $\phi_i$ .

## Λήμμα

Αν  $\mu$  και  $\nu$  είναι θετικά πεπερασμένα μετρα Borel στο  $[0, 2\pi]$  και

$$\exp \left( - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right) = \exp \left( - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t) \right)$$

για κάθε  $z \in \mathbb{D}$ , τότε  $\mu = \nu$ .

# Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

## Πρόταση

Εστω  $\phi$  εσωτερικη συναρτηση. Ο υποχωρος  $\phi H^2$  του  $H^2$  εχει πεπερασμενη συνδιασταση (δηλαδη  $\dim(\phi H^2)^\perp = m < \infty$ ) αν-ν η  $\phi$  ειναι γινομενο Blaschke με πεπερασμενο πληθος ( $= m$ ) παραγοντων (επι μια σταθερα).

## Ορισμός

Αν  $\phi_1, \phi_2$  ειναι εσωτερικες συναρτησεις, λεμε οτι **η  $\phi_2$  διαιρει την  $\phi_1$**  αν υπαρχει  $\phi_3$  εσωτερικη ωστε  $\phi_1 = \phi_2 \phi_3$ .

Εστω  $\{\phi_i, i \in I\}$  οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων. Λεμε οτι η εσωτερικη συναρτηση  $\phi_M$  ειναι ο **μεγιστος κοινος διαιρετης** της  $\{\phi_i, i \in I\}$  αν (α) η  $\phi_M$  διαιρει καθε  $\phi_i, i \in I$  και (β) καθε αλλη εσωτερικη συναρτηση  $\phi$  που διαιρει την  $\{\phi_i, i \in I\}$ , διαιρει και την  $\phi_M$ . Λεμε οτι η εσωτερικη συναρτηση  $\phi_E$  ειναι το **ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο** της  $\{\phi_i, i \in I\}$  αν (α) καθε  $\phi_i, i \in I$  διαιρει την  $\phi_E$  και (β) αν μια εσωτερικη συναρτηση  $\phi$  διαιρειται απο ολες τις  $\phi_i$  τοτε διαιρειται και απο την  $\phi_E$ .

# Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

## Πρόταση

Καθε οικογενεια  $\{\phi_i, i \in I\}$  εσωτερικων συναρτησεων εχει μεγαστο κοινο διαιρητη.

Καθε *πεπερασμενη* οικογενεια  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  εσωτερικων συναρτησεων εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο.

## Παράδειγμα

Οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων που *δεν* εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο;

## Πρόταση

Αν  $E$  είναι *μη μηδενικος* κλειστος  $S$ -αναλλοιωτος υποχωρος του  $H^2$ , τότε  $E = \phi H^2$  οπου  $\phi$  είναι ο μεγαistos κοινος διαιρητης των εσωτερικων μερων ολων των  $f \in E$ .



# Πινακες Toeplitz

**Υπενθυμιση** Αν  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$  ορθοκανονικη βαση χωρου Hilbert  $H$ , σε καθε  $A \in \mathcal{B}(H)$  αντιστοιχει πινακας  $[a_{nm}]$  οπου  $[a_{nm}] = \langle Ae_m, e_n \rangle$ .

Αν  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ , ο πινακας του τελεστη  $M_\phi$  ως προς τη συνηθισμενη ο/κ βαση  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  του  $L^2(\mathbb{T})$  ειναι

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [\hat{\phi}(n-m)].$$

## Πρόταση

Αν  $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$  εχει  $[a_{nm}] = [u(m-n)]$  στη συνηθισμενη ο/κ βαση, τοτε υπαρχει  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  ωστε  $A = M_\phi$ .

## Ορισμός

Ενας πίνακας (είτε τετραγωνικός είτε  $\infty \times \infty$ ) λεγεται **πίνακας Toeplitz** αν έχει «σταθερες διαγωνιους», δηλ. αν  $m - n = j - i \Rightarrow [a_{nm}] = [a_{ij}]$ .

## Ορισμός

Το **ουσιωδες συνολο τιμων (essential range)** μιας  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ :

$$\text{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \forall \varepsilon > 0\}.$$

## Πρόταση

Αν  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ,

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \text{essran}(\phi).$$

## Ορισμός

Η προβολη του Riesz  $P \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$  οριζεται απο τον τυπο

$$P \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) f_k \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \hat{f}(n) f_n, \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

ισοδυναμα

$$P(f_n) = \begin{cases} f_n, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

ειναι δηλαδη η ορθη προβολη του  $L^2(\mathbb{T})$  επι του  $\tilde{H}^2$ .

## Ορισμός

Αν  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$  οριζουμε τον τελεστη Toeplitz  $T_\phi$

$$T_\phi := PM_\phi|_{\tilde{H}^2} : \tilde{H}^2 \rightarrow \tilde{H}^2 : f \mapsto M_\phi f \mapsto PM_\phi f.$$

Η  $\{f_n : n \geq 0\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $\tilde{H}^2$  και η  $\{f_n : n < 0\}$  είναι ο/κ βάση του  $(\tilde{H}^2)^\perp$ . Εστω  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ . Ως προς τη διασπαση  $L^2(\mathbb{T}) = (\tilde{H}^2)^\perp \oplus \tilde{H}^2$  ο πίνακας του τελεστη  $M_\phi$  γίνεται

$$M_\phi \simeq \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} \ddots & \vdots \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[ \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \end{array} \right] \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] \end{array} \right)$$

Αρα

$$T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \widehat{\phi}(0) & \widehat{\phi}(-1) & \widehat{\phi}(-2) & \widehat{\phi}(-3) & \dots \\ \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & \widehat{\phi}(-1) & \widehat{\phi}(-2) & \dots \\ \widehat{\phi}(2) & \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & \widehat{\phi}(-1) & \dots \\ \widehat{\phi}(3) & \widehat{\phi}(2) & \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

## Ορισμός

Ενας τελεστής Toeplitz  $T_\phi$  λεγεται **αναλυτικός τελεστής Toeplitz** αν  $\phi \in \widetilde{H}^\infty$  (οπότε  $T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} : \widetilde{H}^2 \rightarrow \widetilde{H}^2 : f \mapsto M_\phi f$ ).

$$T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \widehat{\phi}(0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & 0 & 0 & \dots \\ \widehat{\phi}(2) & \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & 0 & \dots \\ \widehat{\phi}(3) & \widehat{\phi}(2) & \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

# Τελεστες Toeplitz

## Πρόταση

Ο μεταθετης του unilateral shift  $T_1$  στον  $\tilde{H}^2$  είναι το σύνολο των αναλυτικων τελεστων Toeplitz: Αν  $A \in \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$ , τότε

$$AT_1 = T_1A \iff A = T_\phi \text{ για καποιο } \phi \in \tilde{H}^\infty.$$

## Πρόταση

Ενας φραγμενος τελεστης  $A \in \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$  είναι τελεστης Toeplitz αν-ν έχει πινακα Toeplitz ως προς την ο/κ βαση  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ .

Συνεπεια για  $T \in \mathcal{B}(H^2)$ :

## Πόρισμα

Ενας φραγμενος τελεστης  $T \in \mathcal{B}(H^2)$  είναι τελεστης Toeplitz<sup>2</sup> αν-ν

$$S^*TS = T.$$

<sup>2</sup>δηλ. ο επαγομενος  $\tilde{T} \in \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$  είναι τελεστης Toeplitz

**Παρατήρηση** Η απεικόνιση  $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})) : \phi \mapsto M_\phi$

- Είναι γραμμική:  $M_{\phi+\lambda\psi} = M_\phi + \lambda M_\psi$
- Διατηρεί τη μονάδα:  $M_1 = I$
- Διατηρεί την ενελίξη:  $M_{\bar{\phi}} = M_\phi^*$
- Είναι συστολή (μαάλιστα ισομετρία):  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- Διατηρεί το γινόμενο:  $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$

## Πρόταση

Η απεικόνιση  $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{H}^2) : \phi \mapsto T_\phi = PM_\phi|_{\tilde{H}^2}$

- Είναι γραμμική:  $T_{\phi+\lambda\psi} = T_\phi + \lambda T_\psi$
- Διατηρεί τη μονάδα:  $T_1 = I$
- Διατηρεί την ενελίξη:  $T_{\bar{\phi}} = T_\phi^*$
- Είναι συστολή:  $\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$  και 1-1 (αργότερα θα δειχθεί ισομετρία)
- Δεν διατηρεί το γινόμενο

(πχ.  $f_{-1}f_1 = f_1f_{-1}$  ενώ  $T_{f_{-1}}T_{f_1} \neq T_{f_1}T_{f_{-1}}$ ).

## Πρόταση

Αν  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ , ο τελεστής  $T_\psi T_\phi$  είναι Toeplitz αν-ν είτε  $\phi \in \widetilde{H}^\infty$  είτε  $\bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$ . Τότε έχουμε  $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$ .

Θα χρειασθουν

**Συμβολισμος** Αν  $H$  Hilbert και  $f, g \in H$  ο τελεστής  $fg^* \in \mathcal{B}(H)$  ορίζεται ως εξής:

$$fg^* : h \mapsto \langle h, b \rangle f, f \in H.$$

## Λήμμα

Αν  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ,

$$T_1^*(T_\psi T_\phi)T_1 - (T_\psi T_\phi) = fg^*$$

οπου  $f = P(f_{-1}\psi)$  και  $g = P(f_{-1}\bar{\phi})$ .



# Τελεστές Toeplitz

## Πόρισμα

Αν  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ , έχουμε  $T_\psi T_\phi = 0$  αν-ν είτε  $\psi = 0$  ή  $\phi = 0$  (σ.π.).

Ποτε μετατιθενται; Ελεγχουμε ότι αν και οι δύο  $\phi, \psi \in \widetilde{H}^\infty$ , ή και οι δύο  $\bar{\phi}, \bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$ , ή  $\exists a, b \in \mathbb{C}$  ώστε  $a\psi + b\phi = f_0 = 1$ , τότε μετατιθενται.

## Πρόταση

Εστω  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ . Εχουμε  $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$  αν-ν ισχυρεί (τουλάχιστο) ένα από τα ακόλουθα

- οι  $\phi$  και  $\psi$  ανήκουν στον  $\widetilde{H}^\infty$ ,
- οι  $\bar{\phi}$  και  $\bar{\psi}$  ανήκουν στον  $\widetilde{H}^\infty$ ,
- υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{C}$  με  $|a| + |b| \neq 0$  ώστε  $a\psi + b\phi = c1$  όπου  $c \in \mathbb{C}$ .

## Πόρισμα

Αν  $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$  και έχουμε  $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$ , τότε είτε ο  $T_\psi T_\phi$  είναι Toeplitz ή μια απ τις  $\phi, \psi$  είναι γραμμ. συνδυασμός της αλλης και της 1.

# Τελεστες Toeplitz

## Παρατήρηση

Ενας τελεστης Toeplitz  $T_\phi$  είναι αυτοσυζυγής αν-ν η  $\phi$  παίρνει σ.π. πραγματικές τιμές (γιατί  $T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}$ ).

## Πόρισμα

Ενας τελεστης Toeplitz  $T_\phi$  είναι φυσιολογικός αν-ν υπάρχουν  $c, d \in \mathbb{C}$  και  $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$  πραγματική ώστε  $\phi = c\psi + d$  σ.π.

## Πρόταση

Δεν υπάρχουν  $\neq 0$  συμπαγείς τελεστες Toeplitz.

# Το φασμα τελεστων Toeplitz

## Ορισμός

Το ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range) μιας  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ :

$$\text{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \forall \varepsilon > 0\}.$$

## Πρόταση

Αν  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ,

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \text{essran}(\phi).$$

## Θεώρημα

Αν  $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ , τότε  $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$ . Μαλιστα

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) \subseteq \sigma_a(T_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi).$$