Ο πυρήνας του Poisson και ο χωρος $\widetilde{H}^2$

Αν [1] $\phi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ειναι ολοκληρωσιμη συναρτηση, για καθε $0 \le r < 1$, η σειρα

$$\phi_r(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{\phi}(k)e^{ikt}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

συγκλινει απολυτα και ομοιομορφα, αρα οριζει συνεχη συναρτηση $\phi_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (παρολο που για $r = 1$ η σειρα αυτη, δηλαδη η σειρα Fourier της ϕ, μπορει να μην συγκλινει ουτε κατα σημειο). Πραγματι η (διπλη) ακολουθια $(\hat{\phi}(k))$ ειναι φραγμενη, γιατι

$$|\hat{\phi}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)e^{-ikt}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi(t)|dt := \|\phi\|_1$$

για καθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπως

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|r^{|k|}\hat{\phi}(k)e^{ikt}\right| \le \|\phi\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} < \infty.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi_r(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{\phi}(n)e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)e^{-ins}ds\right)e^{int} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)e^{in(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-s)}\right)ds \ \text{ (ομοιόμορφη σύγκλιση)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t-s)P_r(s)ds \ \text{ (περιοδικοτητα)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{οπου}\quad P_r(t) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt \qquad (1)
\end{aligned}$$

ο πυρήνας του Poisson. Αν γραψουμε $z = re^{it}$, εχουμε

$$\begin{aligned}
P_r(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + 1 + \frac{z}{1-z} \\
&= \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1}{1-z} = \frac{\bar{z}(1-z)+(1-\bar{z})}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρουμε οτι $P_r(t) \ge 0$ για καθε t. Επισης, εφοσον η σειρα συγκλινει ομοιόμορφα, για καθε $r \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{Z}$ εχουμε

$$\widehat{P_r}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)e^{-ikt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)t}dt = r^{|k|}$$

$$\text{και ειδικοτερα}\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)dt = r^0 = 1.$$

[1] poissonn, 13 Οκτωβρίου 2024

Παρατήρηση 1. *Ο πυρήνας του Poisson έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) για καθε $r \in [0,1)$, η συναρτηση $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη αρνητική.

(β) Αν $\delta \in (0,\pi/2)$, τοτε στο σύνολο $E_\delta := [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi] = [-\pi,\pi]\backslash(\delta,\delta)$, εχουμε $P_r(t) \to 0$ ομοιόμορφα ως προς $t \in E_\delta$ καθως $r \nearrow 1$.

(γ) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1$ για κάθε $r \in [0,1)$.

Απόδειξη. Μονον η (β) μενει να αποδειχθει: Αν $0 < \delta < \pi/2$ τοτε για καθε t με $\delta \le |t| \le \pi$ εχουμε $\cos t \le \cos\delta$, επομενως

$$0 \le P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2}$$

που τεινει στο 0 καθως $r \nearrow 1$. □

Στην πολυ ειδικη περιπτωση οπου η ϕ ειναι *φραγμενη στο* $[-\pi,\pi]$ *και συνεχης σε καποιο* t, για καθε $\epsilon > 0$ υπαρχει $\delta = \delta_t > 0$ ωστε

$$|s| < \delta \Rightarrow |\phi(t-s) - \phi(t))| < \epsilon$$

οποτε εχουμε,

$$\begin{aligned}
|\phi_r(t) - \phi(t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\phi(t-s) - \phi(t))P_r(s)ds\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{E_\delta^c}|\phi(t-s) - \phi(t)|P_r(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int_{E_\delta}|\phi(t-s) - \phi(t)|P_r(s)ds \\
&\le \epsilon\frac{1}{2\pi}\int_{E_\delta^c}P_r(s)ds + 2\|\phi\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{E_\delta}P_r(s)ds \\
&\le \epsilon + 2\|\phi\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{E_\delta}P_r(s)ds\,.
\end{aligned}$$

Αλλα στο συνολο E_δ εχουμε $\lim_{r\nearrow 1} P_r(s) = 0$ ομοιόμορφα ως προς $s \in E_\delta$, οπότε υπαρχει $r_0 < 1$ ωστε, οταν $r \in (r_0, 1)$, να εχουμε $\int_{E_\delta^c} P_r(s)ds < 2\pi\epsilon$, αρα $|\phi_r(t) - \phi(t)| < 2\epsilon$.
Δηλαδη το οριο $\lim_{r\nearrow 1}\phi_r(t)$ υπαρχει και

$$\lim_{r\nearrow 1}\phi_r(t) = \phi(t)$$

σε καθε σημειο t συνεχειας της ϕ. (οταν $t = \pm\pi$, θελεις και $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$.)

Αν επιπλεον η ϕ ειναι *συνεχης* στο $[-\pi,\pi]$ και $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$, τοτε για καθε $\epsilon > 0$ υπαρχει $\delta = \delta_\epsilon > 0$ ωστε $|s| < \delta \Rightarrow |\phi(t-s) - \phi(t))| < \epsilon$ για καθε $t \in [-\pi,\pi]$, οποτε η συγκλιση $\lim_{r\nearrow 1}\phi_r(t) = \phi(t)$ ειναι ομοιομορφη ως προς $t \in [-\pi,\pi]$. Αποδειξαμε λοιπον το ακόλουθο

Θεώρημα 2. *Αν η ϕ ειναι φραγμενη στο $[-\pi,\pi]$ και συνεχης στο t, τοτε $\lim\limits_{r\nearrow 1}\phi_r(t) = \phi(t)$.*
Αν επιπλεον η ϕ ειναι συνεχης *στο $[-\pi,\pi]$ και $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$, τοτε $\lim\limits_{r\nearrow 1}\|\phi_r - \phi\|_\infty = 0$.*

Ο ολοκληρωτικος τυπος Poisson για τον χωρο $\widetilde{H}^2$

Υπενθυμιζουμε οτι ο $\widetilde{H}^2$ ειναι ο κλειστος γραμμ. υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ που παραγεται απο τα *αναλυτικα τριγωνομετρικα πολυωνυμα* $\{f_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ (οπου $f_k(t) = e^{ikt},\ t \in [-\pi, \pi]$).

Επισης υπενθυμιζουμε οτι αν $f \in H^2$ με ($f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$, η αντιστοιχη «συνοριακη» συναρτηση $\tilde{f}$ εχει συντελεστες Fourier

$$\langle \tilde{f}, f_k \rangle = \begin{cases} a_k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Η απεικονιση $f \mapsto \tilde{f} : H^2 \to \widetilde{H}^2$ ειναι ισομορφισμος γραμμικων χωρων. Το επομενο θεωρημα δινει εναν τυπο για την αντιστροφη απεικονιση: απο τις τιμες της $\tilde{f}$ (σχεδον παντου) στον $\mathbb{T}$ δινει τις τιμες της f στον $\mathbb{D}$:

Θεώρημα 3 (Ολοκληρωτικος τυπος Poisson). *Αν $f \in H^2$ με αντιστοιχη $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ τοτε για καθε $re^{it} \in \mathbb{D}$ εχουμε*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(s-t)ds$$

οπου P_r ο πυρηνας Poisson.

Απόδειξη. Σταθεροποιουμε το $z_0 = re^{it} \in \mathbb{D}$ και για $s \in [-\pi, \pi]$, εχουμε (απο την (1) και το γεγονος οτι η P_r ειναι αρτια)

$$\begin{aligned} P_r(s-t) = P_r(t-s) &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ik(t-s)} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(t-s)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (re^{-it})^k e^{iks} + \sum_{n=0}^{\infty} (re^{it})^n e^{-ins} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_0^k e^{iks} + \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n e^{-ins}. \end{aligned}$$

Συνεπως, απο την ομοιομορφη συγκλιση των σειρων, αφου $|z_0| = r < 1$, εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(s-t)ds &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_0^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) e^{iks} ds + \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) e^{-ins} ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_0^k \langle \tilde{f}, f_{-k} \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n \langle \tilde{f}, f_k \rangle \\ &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n a_n = f(z_0) \end{aligned}$$

οπως θελαμε. □