# Αναγοντες υποχωροι του $M_1$

Υπενθυμιζουμε[1] οτι ενας κλειστος υποχωρος $E \subseteq L^2(\mathbb{T})$ *αναγει τον* $M_1$ αν και μονον αν ο $E$ και ο $E^\perp$ είναι $M_1$-αναλλοίωτοι, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\mathrm{M}_1(E) \subseteq E$ και $\mathrm{M}_1^*(E) \subseteq E$.

**Πρόταση 1.** *Ενας κλειστος υποχωρος $E$ του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον $M_1$ αν-ν ειναι της μορφης*

$$\begin{aligned} E_\Omega &:= \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T}) \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{it}) = 0 \text{ σχ. παντου στο } \Omega^c\}. \end{aligned}$$

*οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.*

*Εναλλακτικη Αποδειξη.* Αν ο $E$ ειναι της μορφης $E_\Omega$, ειναι ευκολο να δει κανεις οτι ειναι κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ και οτι αναγει τον $M_1$:

Πραγματι, ειναι φανερο οτι ο $E_\Omega$ ειναι γραμμικος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$, και ειναι κλειστος γιατι $f \in E_\Omega \iff f = \chi_\Omega f \iff \chi_{\Omega^c} f = 0$ και η απεικονιση $f \mapsto \chi_{\Omega^c} f$ ειναι συνεχης στον $L^2(\mathbb{T})$.

Επισης αν $f \in E_\Omega$, δηλαδη $f(e^{it}) = 0$ σχ. παντου στο $\Omega^c$, τοτε $e^{it} f(e^{it}) = 0$ σχ. παντου στο $\Omega^c$, δηλαδη $M_1 f \in E_\Omega$, αλλα και $e^{-it} f(e^{it}) = 0$ σχ. παντου στο $\Omega^c$, δηλαδη $M_1^* f \in E_\Omega$.

Το ουσιαστικο περιεχομενο της Προτασης ειναι το αντιστροφο:

Εστω λοιπον $E$ κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ ωστε $\mathrm{M}_1(E) \subseteq E$ και $\mathrm{M}_1^*(E) \subseteq E$.
Αυτο σημαινει οτι $\mathrm{M}_1^n(E) \subseteq E$ και $(\mathrm{M}_1^*(E))^n \subseteq E$ για καθε $n \in \mathbb{Z}_+$. Αλλα $\mathrm{M}_1^* = \mathrm{M}_1^{-1}$, συνεπως $\mathrm{M}_1^n(E) \subseteq E$ για καθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ονομαζουμε $q = P_E(\mathbb{1}) \in E$ την (ορθη) προβολη του $\mathbb{1} \in L^2(\mathbb{T})$ στον $E$. Παρατηρουμε οτι $\mathbb{1} - q \perp E$ γιατι $\mathbb{1} - q = (I - P_E)(\mathbb{1})$ και ο τελεστης $I - P_E$ ειναι η ορθη προβολη στον $E^\perp$.

Ομως $q \in E$, αρα $M_1^n q \in E$ για καθε $n \in \mathbb{Z}$ και συνεπως $\mathbb{1} - q \perp M_1^n q$ για καθε $n \in \mathbb{Z}$.

Εχουμε λοιπον, για καθε $n \in \mathbb{Z}$

$$0 = \langle M_1^n(q), \mathbb{1} - q \rangle = \int f_n q \overline{(\mathbb{1} - q)} \, dm = \int (q - |q|^2) f_n \, dm$$

επομενως η $q - |q|^2$ εχει ολους τους συντελεστες Fourier ισους με μηδεν, αρα μηδενιζεται (σχεδον παντου). [2]

Αυτο σημαινει οτι $q = |q|^2$ σχεδον παντου. Επιλεγοντας μια συναρτηση Borel $q_0$ που ανηκει στην κλαση της $q$ (ως προς ισοτητα $m$-σχεδον παντου), οριζουμε

$$\Omega := \{e^{-it} \in \mathbb{T} : q_0(e^{-it}) \neq 0\}.$$

Το $\Omega$ ειναι Borel υποσυνολο του $\mathbb{T}$ και εχουμε $q(e^{-it}) = 1$ για καθε $e^{-it} \in \Omega$ (απο την σχεση $q = |q|^2$ ), δηλαδη $q = \chi_\Omega$ (σχεδον παντου). Συνεπως

$$qL^2(\mathbb{T}) := \{qg : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T}) = E_\Omega.$$

[1] nonred, 8 Μαρτίου 2026

[2] Ας παρατηρησουμε εδω τον κρισιμο ρολο του γεγονοτος οτι ο μετασχηματισμος Fourier ειναι 1-1.

*Ισχυρισμος.* $E = E_\Omega$ δηλαδη $E = qL^2(\mathbb{T})$.

*Αποδειξη Ισχυρισμου.* Ο χωρος $qL^2(\mathbb{T}) = \{qg : g \in L^2(\mathbb{T})\}$ ειναι η $\|\cdot\|_{L^2}$-κλειστη γραμμικη θηκη του συνολου

$$\{qf_n : n \in \mathbb{Z}\} = \{M_1^n(q) : n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Αλλα $q \in E$, αρα $M_1^n(q) \in E$ για καθε $n \in \mathbb{Z}$, συνεπως (αφου ο $E$ ειναι κλειστος υποχωρος) $qL^2(\mathbb{T}) \subseteq E$.

Για να δειξουμε οτι $E \subseteq qL^2(\mathbb{T})$ αρκει να δειξουμε οτι αν καποιο $f \in E$ ειναι καθετο στον $qL^2(\mathbb{T})$, τοτε ειναι 0.

Η σχεση $f \perp qL^2(\mathbb{T})$ δινει $f \perp f_n q$ δηλαδη

$$\int qf_n\bar{f}\,dm = \langle f_n q, f\rangle = 0$$

για καθε $n \in \mathbb{Z}$. Απο την αλλη μερια, αφου $f \in E$ εχουμε $f_n f = M_1^n(f) \in E$ για καθε $n \in \mathbb{Z}$ αρα, αφου $\mathbb{1} - q \perp E$, εχουμε $\langle f_n f, \mathbf{1} - q\rangle = 0$, ισοδυναμα $\langle f_{-n} f, \mathbf{1} - q\rangle = 0$ (γιατι $-\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$), δηλαδη

$$\int(\mathbf{1} - q)f_n\bar{f}\,dm = \int(\mathbf{1} - q)\overline{f_{-n}f}\,dm = 0$$

για καθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατα συνεπεια,

$$\int f_n\bar{f}\,dm = \int(\mathbf{1} - q)f_n\bar{f}\,dm + \int qf_n\bar{f}\,dm = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

δηλαδη ολοι οι συντελεστες Fourier της $\bar{f}$ μηδενιζονται, αρα $f = 0$, οπως θελαμε. $\square$