Για την αρχη του μεγιστου

Θεώρημα 1 (Αρχη μεγιστου). *Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτο και συνεκτικο και $f : G \to \mathbb{C}$ ολομορφη.* [1] *Αν υπαρχει $a \in G$ ωστε $|f(a)| \geq |f(z)|$ για καθε $z \in G$, τοτε η f ειναι σταθερη.*

Απόδειξη. Εστω $r_0 > 0$ ωστε $B(a, r_0) \subseteq G$. Η f αναπτυσσεται σε δυναμοσειρα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r_0$$

που συγκλινει ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα της $B(a, r_0)$. Ειδικοτερα, για καθε $r \in (0, r_0)$,

$$f(a + re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi] \tag{*}$$

(ομοιομορφη συγκλιση). Επεται οτι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\ dt = c_0$$

γιατι $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\ dt = 0$ οταν $n \neq 0$. Ομως $c_0 = f(a)$, οποτε εχουμε δειξει την σημαντικη *Ιδιοτητα Μεσης Τιμης* [2]

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\ dt\,.$$

Χρησιμοποιωντας την ανισοτητα Cauchy-Schwarz (CS) και την υποθεση (υπ) οτι $|f(a + re^{it})| \leq |f(a)|$ για καθε t, εχουμε

$$\begin{aligned} |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{it})|\ dt &\overset{CS}{\leq} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{it})|^2\ dt \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\ dt \right)^{1/2} \\ &\overset{\upsilon\pi}{\leq} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a)|^2\ dt \right)^{1/2} \\ &= |f(a)| \end{aligned}$$

αρα ισχυει η ισοτητα

$$|f(a)| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{it})|^2\ dt \right)^{1/2}.$$

Αλλα η ποσοτητα $\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{it})|^2\ dt \right)^{1/2}$ ειναι η νορμα, στον $L^2([-\pi, \pi])$, της συναρτησης $t \mapsto f(a + re^{it})$ της οποιας οι συντελεστες Fourier ειναι $c_n r^n$, $n \geq 0$ (δες την (*)), οποτε απο την ισοτητα Parseval εχουμε,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{it})|^2\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|^2\,.$$

[1] max, 14 Μαρτίου 2026

[2] Η ισοτητα αυτη ειναι επισης αμεση συνεπεια του ολοκληρωτικου τυπου του Cauchy, αλλα η απόδειξή μας χρησιμοποιησε μονον την τοπικη παραστασιμοτητα σε δυναμοσειρα μιας αναλυτικης συναρτησης.

Αλλα το αριστερα μελος ισουται με $|f(a)|^2 = |c_0|^2$, επομενως

$$|c_0|^2 = |f(a)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{it})|^2 \ dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n r^n|^2$$

οποτε $c_n = 0$ για καθε $n \geq 1$. Δειξαμε οτι

$$f(a+re^{it}) = c_0 \quad \text{για καθε } t$$

(δες την (*)).
Η f ειναι λοπον ιση με τη σταθερη συναρτηση $f(a)\mathbf{1}$ στον κυκλο $C(a,r) := \{a+re^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$ (οπου $r \in (0, r_0)$) ο οποιος ομως εχει σημεια συσσωρευσης στο G. Συνεπως, απο την Αρχη της Ταυτοτητας, η f ειναι ιση με τη σταθερη συναρτηση παντου στο G. $\square$