Ο χωρος Hilbert του Hardy και οι τελεστες του

Μια περιγραφικη εισαγωγικη παρουσιαση

Α. Κατάβολος

Οκτωβριος 2023

Βιβλιογραφια

- Rubén A. Martínez-Avendaño and Peter Rosenthal.
  An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space, volume 237 of *Graduate Texts in Mathematics*.
  Springer, New York, 2007.
- Vern I. Paulsen and Mrinal Raghupathi.
  An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, volume 152 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*.
  Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- Nikolai K. Nikolski.
  Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*.
  American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
  Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

Ο Χωρος H^2 του Hardy

Ορισμός

$$H^2 := \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Ο H^2 ειναι χωρος Hilbert για το εσωτερικο γινομενο $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$, οπου $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Πρόταση

Καθε $f \in H^2$ ειναι ολομορφη συναρτηση στον δισκο $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Θεώρημα

Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ειναι συνεχης. Μαλιστα, $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ οπου $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$.

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ του Hardy στον κυκλο $\mathbb{T}$

Θυμιζουμε τον $L^2(\mathbb{T})$ με εσωτερικο γινομενο $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt$ και ο.κ. βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ οπου $f_n(e^{it}) = e^{int}$. Γραφουμε $\hat{f}(k) = \langle f, f_k\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός

$$\widetilde{H}^2 := \left\{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle \tilde{f}, f_n\rangle = 0 \ \forall n < 0\right\}.$$

Ισομορφισμοι:

$$\begin{array}{ccccc} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n & \longleftrightarrow & (a_n) & \longleftrightarrow & \tilde{f} \sim \sum_{n\geq 0} a_n f_n \\ H^2 & \longleftrightarrow & \ell^2 & \longleftrightarrow & \widetilde{H}^2 \end{array}$$

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ του Hardy στον κυκλο $\mathbb{T}$

Θεώρημα

Αν $f \in H^2$ *με* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *οριζουμε για* $r \in (0,1)$

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}, \;\; e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Τοτε $f_r \in \widetilde{H}^2$ *και υπαρχει το*

$$\lim_{r \nearrow 1} f_r := \tilde{f} \quad \text{ως προς τη νορμα του } \widetilde{H}^2$$

οπου $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ *με* $\langle \tilde{f}, f_n \rangle = a_n \; \forall n \geq 0$.

Ο Χωρος H^2 του Hardy III

Θεώρημα (Ολοκληρωτικος τυπος Cauchy)

Αν f ειναι ολομορφη σε ανοικτο συνολο που περιεχει τον κλειστο δισκο $\overline{\mathbb{D}}$, τοτε για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ εχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Θεώρημα (Ολοκληρωτικος τυπος Poisson)

Αν $f \in H^2$ με αντιστοιχη $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ τοτε για καθε $re^{it} \in \mathbb{D}$ εχουμε

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(s - t) ds$$

οπου P_r ο πυρηνας Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, \quad r \in [0,1),\ \theta \in [0, 2\pi].$$

The (unilateral) shift S on ℓ^2 and T on H^2

$$S : \ell^2 \to \ell^2 : \; S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \qquad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

$$T : H^2 \to H^2 : (T(f))(z) := z f(z), \qquad f \in H^2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \rightsquigarrow \quad (T(f))(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1},$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] \arrow[d, tail, two heads, "V"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[d, tail, two heads, "V"] \\
H^2 \arrow[r, "T"'] & H^2
\end{tikzcd} \qquad : \; T = VSV^{-1}$$

οπου $\; V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2 : e_n \mapsto f_n$

S-Αναλλοιωτοι υποχωροι

Ενας κλειστος υποχωρος $E \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ λεγεται S-αναλλοιωτος οταν $S(E) \subseteq E$.
Προφανεις: $E_m = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq m\}$.
Πρτρ. Ο $V(E_m)$ ειναι T-αναλλοιωτος και

$$V(E_m) = \{f \in H^2 : f^{(k)}(0) = 0,\ 0 \leq k < m\} = \{f_m f : f \in H^2\}.$$

Αλλοι;

S-Αναλλοιωτοι υποχωροι

Θεώρημα (Beurling)

Ενας κλειστος υποχωρος $F \subseteq H^2$ *ειναι* T*-αναλλοιωτος αν-ν υπαρχει* $\varphi \in H^\infty$ *με* $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| = 1$ *σχεδον παντου στο* $\mathbb{T}$ *ωστε*

$$F = \{\varphi f : f \in H^2\} = \varphi H^2 \,.$$

Ορισμός

H^∞ ειναι ο χωρος των ολομορφων και φραγμενων $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.
Μια $\varphi \in H^\infty$ λεγεται *εσωτερικη (inner)* αν $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Ισχυει οτι $H^\infty \subseteq H^2$.

Παραγοντοποιηση (Factorization)

Ορισμός

Μια $\varphi \in H^\infty$ λεγεται *εσωτερικη (inner)* αν $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.
Μια $f \in H^2$ λεγεται *εξωτερικη (outer)* αν $\overline{\operatorname{span}}\{T^k(f) : k \geq 0\} = H^2$.

Μια εξωτερικη συναρτηση δεν εχει καμμια ριζα στο $\mathbb{D}$.

Υπενθ: Οι ριζες μιας $\neq 0$ ολομορφης συναρτησης στον $\mathbb{D}$ αποτελουν «μικρο» συνολο: δεν εχουν σημεια συσσωρευσης στο $\mathbb{D}$.

Θεώρημα (F. και M. Riesz)

Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, το συνολο $\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$ εχει μετρο (Lebesgue) μηδεν.

Θεώρημα (Inner-Outer factorization)

Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, υπαρχει εσωτερικη φ και εξωτερικη g ωστε $f = \varphi g$.

Εφαρμογη: Θεωρημα Müntz - Szász

Υπενθυμιση (Θεωρημα Weierstrass): Καθε $f \in C([0,1])$ προσεγγιζεται ομοιομορφα απο ακολουθια πολυωνυμων. Δηλαδη αν $\phi_n(t) = t^n$, η γραμμικη θηκη $\text{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ ειναι πυκνη στον $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Θεώρημα

Αν $\{p_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ *ειναι ακολουθια θετικων αριθμων με* $p_0 = 1$, $\inf p_n > 0$ *και* $\sum_n \frac{1}{p_n} = +\infty$, *τοτε το συνολο* $\text{span}\{\phi_{p_n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ *ειναι πυκνο στον* $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Πόρισμα

Καθε $f \in C([0,1])$ *προσεγγιζεται ομοιομορφα απο ακολουθια πολυωνυμων με εκθετες απο το συνολο των πρωτων αριθμων.*

Τελεστες στον H^2

- Τελεστες πολλαπλασιασμου στον $L^2 := L^2(\mathbb{T})$: Καθε $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ επαγει φραγμενο τελεστη στον L^2 με (κατα σημειο) πολλαπλασιασμο:

$$M_\varphi : L^2 \to L^2 : f \mapsto \varphi f.$$

- Η προβολη $P \in \mathcal{B}(L^2)$ επι του H^2 μπορει να γραφτει

$$(Pf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (f \in L^2(\mathbb{T}))$$

Τελεστες στον H^2: (1) τελεστες Toeplitz

• Τελεστες *Toeplitz*: Οριζουμε

$$T_\varphi := P \circ M_\varphi : H^2 \xrightarrow{M_\varphi} L^2 \xrightarrow{P} H^2 : f \mapsto \varphi f \mapsto P(\varphi f).$$

Οταν $\varphi \in H^\infty$ τοτε $T_\varphi := M_\varphi|_{H^2}$ (πρδγ: $T_\zeta = T$).

• Οι Τελεστες Toeplitz εχουν πινακες (ως προς την οκ βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$) με σταθερες διαγωνιους (και κατω τριγωνικους οταν $\varphi \in H^\infty$).

• Η *αλγεβρα Toeplitz* ειναι η νορμ-κλειστη υπαλγεβρα του $\mathcal{B}(\ell^2)$ που παραγουν οι $\{S, S^*, I\}$. Στον H^2, η αντιστοιχη νορμ-κλειστη υπαλγεβρα (που παραγουν οι $\{T_\zeta, T_\zeta^*, I\}$) ειναι η

$$\{T_\varphi + K : \varphi \in C(\mathbb{T}), K \in \mathcal{K}(H^2)\}.$$

Τελεστες στον H^2: (2) Τελεστες συνθεσης (composition)

Αν $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ειναι ολομορφη, τοτε για καθε $f \in H^2$ η συναρτηση

$$C_\psi(f) := f \circ \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

ειναι ολομορφη. Ισχυει κατι ισχυροτερο:

Θεώρημα

Ο τελεστης C_ψ στελνει τον H^2 στον H^2 και ειναι φραγμενος, με

$$C_\psi \leq \left(\frac{1 + |\psi(0)|}{1 - |\psi(0)|} \right)^{1/2}.$$

Οι τελεστες αυτοι ειναι σημαντικοι στη θεωρια δυναμικων συστηματων.

Πρελουδιο: Η εκθετικη συναρτηση

1. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, οριζουμε

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Η σειρα συγκλινει απολυτα για καθε $z \in \mathbb{C}$ και ομοιομορφα σε καθε φραγμενο υποσυνολο του $\mathbb{C}$. Συνεπως η συναρτηση $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ειναι συνεχης.

2. Αποδεικνυεται απο την απολυτη συγκλιση της σειρας οτι

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Οριζουμε $e := \exp(1)$.
Εχουμε $e^x = \exp(x)$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Η *μιγαδικη παραγωγος*

$$\exp'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$

υπάρχει για καθε $z \in \mathbb{C}$ και ισουται με $\exp(z)$.

Η εκθετικη συναρτηση

4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ εχουμε $\exp(z)\exp(-z) = 1$ αρα $\exp(z) \neq 0$.

5. Ο περιορισμος της exp στην ευθεια $\mathbb{R}$ ειναι γνησιως αυξουσα συνάρτηση που απεικονιζει το $\mathbb{R}$ ομοιομορφικα επι του $\mathbb{R}_+$.

6. Για καθε $t \in \mathbb{R}$ εχουμε $|e^{it}| = 1$ δηλαδη $e^{it} \in \mathbb{T}$. Οριζουμε

$$\cos t := \mathrm{Re}(e^{it}), \qquad \sin t := \mathrm{Im}(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

αρα

$$e^{it} = \cos t + \iota \sin t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

και επεται οτι οι cos και sin είναι παραγωγισιμες συναρτησεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\cos' t = -\sin t, \qquad \sin' t = \cos t.$$