Το Θεωρημα του Fatou

Θεώρημα 1. *Αν $f \in H^2$,* [1] *υπαρχει συνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ με μηδενικο μετρο Lebesgue ωστε για καθε $t \notin \Delta$,*

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) = \tilde{f}(e^{it}) \,.$$

Απόδειξη. Υπενθυμιζουμε οτι αν $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$ η αντιστοιχη «συνοριακη» συναρτηση $\tilde{f}$ εχει συντελεστες Fourier

$$\langle \tilde{f}, f_k \rangle = \begin{cases} a_k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \tag{*}$$

Συμβολισμος. Για συντομια θετουμε $\phi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} : \phi(t) = \tilde{f}(e^{it})$.

Παρατηρουμε οτι, αφου $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$, εχουμε $\phi \in L^1([-\pi, \pi])$.

Εχουμε δειξει οτι

$$\begin{aligned} f(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(t-s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t-s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} \phi(t-x) P_r(x) d(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t-x) P_r(x) dx \,. \end{aligned}$$

Αρκει λοιπον να δειξουμε το ακολουθο

Θεώρημα 2 (Fatou). *Αν $\phi \in L^1([-\pi, \pi]$, υπαρχει συνολο $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$ με μηδενικο μετρο Lebesgue ωστε για καθε $t \notin \Delta$,*

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t-x) P_r(x) dx = \phi(t) \,.$$

Απόδειξη. Αν η ϕ ειναι (σχεδον παντου) ιση με μια σταθερα c, τοτε $f(re^{it}) = c$ για καθε $re^{it} \in \mathbb{D}$ οποτε το οριο υπαρχει και ισουται με c. Μπορουμε λοιπον χωρις βλαβη, αφαιρωντας εν αναγκη τη σταθερα $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) ds$ απο την ϕ, να υποθεσουμε οτι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) ds = 0 \,. \tag{m}$$

Θεωρουμε τωρα το *αοριστο ολοκληρωμα* της ϕ

$$\psi(t) := \int_{-\pi}^{t} \phi(s) ds$$

[1] fatou, 13 Οκτωβρίου 2024

Η ψ ειναι βεβαιως καλα ορισμενη και συνεχης (!) στο $[-\pi,\pi]$.
Απο το Θεωρημα Διαφορισης του Lebesgue [2] η παραγωγος της ψ υπαρχει και ισουται με $\phi(t)$ *σχεδον για καθε* $t\in(-\pi,\pi)$. Επισης, εχουμε $\psi(-\pi)=0$ απο τον ορισμο και $\psi(\pi)=0$ λογω της (m).

Επεκτεινουμε τις ψ και ϕ περιοδικα στο $\mathbb{R}$ και ονομαζουμε $\Delta\subseteq\mathbb{R}$ το (m-μηδενικο) συνολο ωστε

$$t\in\mathbb{R}\backslash\Delta \quad\Rightarrow\quad \exists\psi'(t)=\phi(t)\,.$$

Για τεχνικους λογους αντικαθιστουμε το Δ με το $\Delta\cup(\Delta-\pi)$ ωστε να εξασφαλισουμε οτι $s\in\Delta\Rightarrow s-\pi\in\Delta$.

Εχουμε τωρα, αφου $\psi'(s)=\phi(s)$ σχεδον για καθε s,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds&=\int_{-\pi}^{\pi}\psi'(s)P_r(t-s)ds\\ &\overset{(bp)}{=}[P_r(t-s)\psi(s)]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\psi(s)dP_r(t-s)\\ &=0+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(s)P_r'(t-s)ds \qquad (1)\end{aligned}$$

οπου στη σχεση (bp) εφαρμοσαμε «ολοκληρωση κατα μερη» (θα αιτιολογηθει χωριστα στο τελος) και χρησιμοποιησαμε οτι $\psi(-\pi)=\psi(\pi)=0$.

Υπενθυμιζουμε τωρα οτι $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$ οποτε, για καθε $x\in(-\pi,\pi)$,

$$P_r'(x)=\frac{2r(r^2-1)\sin x}{(1-2r\cos x+r^2)^2}=-P_r'(-x)\,.$$

Απο την (1) εχουμε λοιπον (με την αλλαγη μεταβλητης $s\to t-s$)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds&=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t-s)P_r'(s)ds\\ &=\int_{-\pi}^{0}\psi(t-s)P_r'(s)ds+\int_{0}^{\pi}\psi(t-s)P_r'(s)ds\\ &=\int_{\pi}^{0}\psi(t+x)P_r'(-x)d(-x)+\int_{0}^{\pi}\psi(t-s)P_r'(s)ds\\ &=-\int_{\pi}^{0}\psi(t+x)(-P_r'(x))dx+\int_{0}^{\pi}\psi(t-s)P_r'(s)ds\\ &=-\int_{0}^{\pi}\psi(t+x)P_r'(x)dx+\int_{0}^{\pi}\psi(t-s)P_r'(s)ds\\ &=\int_{0}^{\pi}(\psi(t-s)-\psi(t+s))P_r'(s)ds\\ &=\int_{0}^{\pi}\frac{\psi(t+s)-\psi(t-s)}{2\sin s}\frac{4r(1-r^2)\sin^2 s}{(1-2r\cos s+r^2)^2}ds\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

[2] Κουμουλλης-Νεγρεποντης 14.13, Γιαννοπουλος [2022] 2.4.7

Ισχυρισμος Εστω $t \notin \Delta$. Η συναρτηση

$$h_t(s) := \frac{\psi(t+s) - \psi(t-s)}{2\sin s}$$

επεκτεινεται σε συνεχη συναρτηση στο $[0, \pi]$.

Αποδειξη Ισχυρισμου. Βεβαιως η h_t οριζεται και ειναι συνεχης στο $(0, \pi)$. Αρκει λοιπον να δειχθει οτι υπαρχουν (στο $\mathbb{C}$) τα ορια στα ακρα:

Πραγματι, στο 0 υπαρχει το οριο

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \frac{\psi(t+s) - \psi(t-s)}{2\sin s} &= \lim_{s\to 0} \left(\frac{\psi(t+s) - \psi(t)}{2s} + \frac{\psi(t) - \psi(t-s)}{2s} \right) \frac{s}{\sin s} \\ &= \frac{\psi'(t) + \psi'(t)}{2} \cdot 1 = \phi(t) \,. \end{aligned}$$

αφου $t \notin \Delta$ οποτε η $\psi'(t)$ υπαρχει και ισουται με $\phi(t)$. Επισης, στο π υπαρχει το οριο

$$\begin{aligned} \lim_{s\to \pi} \frac{\psi(t+s) - \psi(t-s)}{2\sin s} &= \lim_{x\to 0} \frac{\psi(t+\pi+x) - \psi(t-\pi-x)}{2\sin(\pi+x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\psi(t+\pi+x) - \psi(t+\pi-x)}{-2\sin(x)} = -\phi(t+\pi) \end{aligned}$$

εφοσον $\psi(t-\pi-x) = \psi(t+\pi-x)$ (περιοδικοτητα) και $t+\pi \notin \Delta$.

Ο Ισχυρισμος αποδειχθηκε.
Κατα συνεπεια, η h_t ανηκει στον $L^1([0,\pi])$.

Τελικα: Εστω $\epsilon > 0$. Αφου το οριο $\lim_{s\to 0} h_t(s)$ υπαρχει και ισουται με $\phi(t)$, υπαρχει $\delta \in (0, \pi)$ ωστε

$$0 < s < \delta \Rightarrow |h_t(s) - \phi(t)| < \epsilon \,. \tag{3}$$

Επισης, δεν ειναι δυσκολο να δειχθει [2] οτι ο πυρηνας

$$K_r(s) := \frac{4(1-r^2)\sin^2 s}{(1-2r\cos s + r^2)^2} = -\frac{1}{r} P_r'(s) \sin s$$

εχει την ιδιοτητα

$$\lim_{r \nearrow 1} K_r(s) = 0 \quad \text{ομοιομορφα ως προς } \; s \in [\delta, \pi]$$

οποτε υπαρχει $r_0 < 1$

$$r \in (r_0, 1) \quad \Rightarrow \quad \sup_{s\in(\delta,\pi]} K_r(s) < \epsilon \,. \tag{4}$$

Επισης υπολογιζεται οτι [2]

$$\int_0^\pi K_r(s) ds = 2\pi \quad \text{για καθε } \; r < 1 \,.$$

Συνεπως, απο την (2), διαιρωντας με r,

[2] Ασκησεις!!

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds-2\pi\phi(t) &= \int_0^{\pi}\frac{\psi(t+s)-\psi(t-s)}{2\sin s}\frac{4(1-r^2)\sin^2 s}{(1-2r\cos s+r^2)^2}ds-\phi(t)\int_{-\pi}^{\pi}K_r(s)ds \\
&= \int_0^{\pi}\left(h_t(s)-\phi(t)\right)K_r(s)ds \\
\left|\frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds-2\pi\phi(t)\right| &\le \int_0^{\delta}|h_t(s)-\phi(t)|K_r(s)ds+\int_{\delta}^{\pi}|h_t(s)-\phi(t)|K_r(s)ds \\
&\le \epsilon\int_0^{\delta}K_r(s)ds+\int_{\delta}^{\pi}|h_t(s)-\phi(t)|K_r(s)ds \quad \text{απο την (3)} \\
&< \epsilon\int_0^{\pi}K_r(s)ds+(\|h_t\|_1+\|\phi\|_1)\epsilon \quad \text{απο Hölder και την (4)}
\end{aligned}
$$

οποτε επεται οτι

$$
\left|\frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds-2\pi\phi(t)\right|<\epsilon(1+\|h_t\|_1+\|\phi\|_1)
$$

για καθε $r\in(r_0,1)$, αρα $\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds=2\pi\phi(t)$, επομενως

$$
\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t-s)ds=\phi(t)
$$

οπως θελαμε. □

Αιτιολογηση της σχεσης (1) (ολοκληρωση κατα μερη) Εστω $t_0\notin\Delta$. Η συναρτηση $(t,s)\mapsto P_r'(t)\phi(s)$ ειναι απολυτως ολοκληρωσιμη σε καθε συμπαγες [3] υποσυνολο $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Το διαδοχικο ολοκληρωμα

$$
\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi}\left(\int_{\pi}^{t_0-t}P_r'(t)\phi(s)ds\right)dt
$$

ισουται με το διπλο ολοκληρωμα

$$
\iint_{\Omega}P_r'(t)\phi(s)dm_2(s,t) \quad (m_2\text{: μετρο Lebesgue στον } \mathbb{R}^2)
$$

οπου

$$
\begin{aligned}
\Omega :=&\{(s,t)\in\mathbb{R}^2: t_0-\pi\le t\le t_0+\pi,\ -\pi\le s\le t_0-t\} \\
=&\{(s,t)\in\mathbb{R}^2: -\pi\le s\le\pi,\ t_0-\pi\le t\le t_0+s\}.
\end{aligned}
$$

[3] γιατι σε καθε φραγμενο ορθογωνιο $K=[a,b]\times[c,d]$ εχουμε $\iint_K|P_r'(t)\phi(s)|dm_2(s,t)=\int_a^b P_r'(t)dt\int_c^d|\phi(s)|ds<\infty$

Επομενως, απο το Θεωρημα Fubini, αλλαζοντας την ταξη ολοκληρωσης εχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi}\left(\int_{-\pi}^{t_0-t} P_r'(t)\phi(s)ds\right)dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{t_0-\pi}^{t_0+s} P_r'(t)\phi(s)dt\right)ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)\left(\int_{t_0-\pi}^{t_0+s} P_r'(t)dt\right)ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)\left(P_r(t_0+s)-P_r(t_0-\pi)\right)ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t_0-s)ds - P_r(t_0-\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t_0-s)ds
\end{aligned}$$

εφοσον $\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)ds = 0$. Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\phi(s)P_r(t_0-s)ds &= \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi}\left(\int_{-\pi}^{t_0-t} P_r'(t)\phi(s)ds\right)dt \\
&= \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r'(t)\left(\int_{-\pi}^{t_0-t}\phi(s)ds\right)dt \\
&= \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r'(t)\psi(t_0-t)dt = \int_{\pi}^{-\pi} P_r'(t_0-s)\psi(s)d(-s) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} P_r'(t_0-s)\psi(s)ds
\end{aligned}$$

οπως θελαμε. □