

Δυο κουβέντες για Μιγαδικούς Αριθμούς

Το σύνολο

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

γίνεται σώμα αν εφοδιασθεί με τις πράξεις

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Γράφουμε $i = (0, 1)$ οπότε κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται μοναδικά $z = x + iy$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και οι πράξεις προκύπτουν από την παρατήρηση ότι $i^2 = (-1, 0) = -1 + i0 = -1$, δηλαδή

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2yv = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Ο μιγαδικός συζυγής \bar{z} του $z = x + iy$ είναι ο $\bar{z} = x - iy$.

Το πραγματικό μέρος του $z = x + iy$ είναι $x = \frac{z + \bar{z}}{2} := \operatorname{Re} z$ και το φανταστικό του μέρος είναι $y = \frac{z - \bar{z}}{2i} := \operatorname{Im} z$.

Το μέτρο ενός $z = x + iy \in \mathbb{C}$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Κάθε μιγαδικός αριθμός z μέτρου 1 είναι της μορφής $z = e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$. Το θ είναι ένα ορισμα του $e^{i\theta}$. Κάθε μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ γράφεται στη λεγόμενη πολική μορφή $z = e^{i\theta}|z|$ όπου $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. Το κυριο ορισμα του z είναι το μοναδικο $\theta \in (-\pi, \pi]$ ώστε $z = |z|e^{i\theta}$.

Έχουμε $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ και, αν $w = e^{i\phi}|w|$, τότε $zw = e^{i(\theta+\phi)}|z||w|$.

Ο (ανοικτός) μοναδιαίος δίσκος

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Ο μοναδιαίος κύκλος

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

είναι το τοπολογικό σύνορο του δίσκου \mathbb{D} .