Το γινόμενο Blaschke

Θεώρημα 1. *Εστω*[1] (z_k) *ακολουθια στο* $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ *με* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|)<\infty$ *και* $s\in\mathbb{Z}_+$. *Τοτε υπαρχει μια εσωτερικη συναρτηση* B *που εχει συνολο ριζων* $Z(B)=\{0\}\cup\{z_k : k\in\mathbb{N}\}$ *και η ριζα* $z=0$ *εχει πολλαπλοτητα* s. *Για καθε* $z\in\mathbb{D}$, *εχουμε*

$$B(z)=z^s\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{z}_i}{|z_i|}\frac{z_i-z}{1-\bar{z}_i z}\ .$$

οπου το απειρογινομενο συγκλινει ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα του $\mathbb{D}$.

Μαλιστα, η πολλαπλοτητα καθε ριζας $\hat{z}\in Z(B)$ *ειναι ακριβως ιση με το πληθος των παραγοντων του γινομενου στους οποιους το* $\hat{z}$ *εμφανιζεται.*

Επομενως, η συνθηκη $z_n\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ με $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|)<\infty$ ειναι ικανη και αναγκαια για την υπαρξη $f\in H^2$ (μαλιστα, εσωτερικης) με ακριβως αυτες τις ριζες.

Σχολιο. Η συγκλιση του απειρογινομενου σημαινει οτι, για καθε συμπαγες υποσυνολο K του $\mathbb{D}$, μονον πεπερασμενο πληθος ορων του απειρογινομενου εχει ριζες στο K και οτι το απειρογινομενο που αποτελειται απο τους υπολοιπους ορους συγκλινει ομοιομορφα στο συμπαγες K σε μια ολομορφη συναρτηση που δεν εχει καμμια ριζα στο K.

Απόδειξη. Αρκει να δειξουμε την υπαρξη εσωτερικης συναρτησης B_0 με συνολο ριζων $Z(B_0)=\{z_k : k\in\mathbb{N}\}$ και να θεσουμε $B(z):=z^sB_0(z)$.

Ονομαζουμε ϕ_i την εσωτερικη συναρτηση

$$\phi_i(z):=\frac{\bar{z}_i}{|z_i|}\frac{z_i-z}{1-\bar{z}_i z}$$

και θετουμε

$$B_n(z):=\prod_{k=1}^{n}\phi_k(z)$$

που ειναι προφανως εσωτερικη συναρτηση με συνολο ριζων $Z(B_n)=\{z_1,\dots,z_n\}$.

Ισχυρισμος 1. Η ακολουθια (B_n) *ειναι βασικη στον χωρο Banach* H^2.

[1] blaschke26, 28 Μαρτίου 2026

Αποδειξη Ισχυρισμου 1. Για $n > m$, εχουμε

$$\begin{aligned}
\|B_n - B_m\|^2 = \left\|\tilde{B}_n - \tilde{B}_m\right\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{B}_n(e^{it}) - \tilde{B}_m(e^{it})|^2 \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{B}_n(e^{it}) - \tilde{B}_m(e^{it}))\overline{(\tilde{B}_n(e^{it}) - \tilde{B}_m(e^{it}))} \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(|\tilde{B}_n(e^{it})|^2 + |\tilde{B}_m(e^{it})|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\tilde{B}_n(e^{it})\overline{\tilde{B}_m(e^{it})})\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 1 - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\tilde{B}_n(e^{it})}{\tilde{B}_m(e^{it})}\right)\right) dt
\end{aligned}$$

εφοσον $|\tilde{B}_n(e^{it})| = 1$ σ.π., οποτε $\overline{\tilde{B}_n(e^{it})} = \dfrac{1}{\tilde{B}_n(e^{it})}$ σ.π.

Παρατηρησε τωρα οτι $B_n(z) = B_m(z)\prod_{k=m+1}^{n}\phi_k(z)$ επομενως η $\frac{B_n}{B_m}$ ειναι καλα ορισμενη εσωτερικη συναρτηση. Συνεπως, απο τον ολοκληρωτικο τυπο του Poisson (για $r = 0$) [2] εχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{B}_n(e^{it})}{\tilde{B}_m(e^{it})}\, dt = \frac{B_n(0)}{B_m(0)}\,.$$

Αλλα

$$\frac{B_n(0)}{B_m(0)} = \prod_{k=m+1}^{n}\phi_k(0) = \prod_{k=m+1}^{n}\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\frac{z_k}{1-0} = \prod_{k=m+1}^{n}|z_k|$$

επομενως

$$\|B_n - B_m\|^2 = 2 - 2\prod_{k=m+1}^{n}|z_k|\,.$$

Απο την υποθεση $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1 - |z_i|) < \infty$ εχουμε οτι το απειρογινομενο $\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|$ συγκλινει σε καποιον μη μηδενικο μιγαδικο αριθμο p. Ειναι ευκολο να συμπερανει κανεις οτι το πηλικο $\prod_{k=m+1}^{n}|z_k| = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}|z_k|}{\prod_{k=1}^{m}|z_k|}$ μπορει να φτασει αυθαιρετα κοντα στο 1, το οποιο σημαινει οτι η $\|B_n - B_m\|$ μπορει να γινει αυθαιρετα μικρη. [3]

Ο Ισχυρισμος 1 αποδειχθηκε.

Υπαρχει λοιπον (πληροτητα του H^2!) μια $B_0 \in H^2$ ωστε $\lim_n \|B_n - B_0\|_{H^2} = 0$.

[2] ή τον ολοκληρωτικο τυπο του Cauchy, εφορον η $\frac{B_n}{B_m}$ οριζεται και ειναι ολομορφη σε μια ανοικτη περιοχη V του κλειστου δισκου $\overline{\mathbb{D}}$ (εδω $V = \mathbb{C}\backslash\{1/\bar{z}_{m+1}, \dots, 1/\bar{z}_n\}$).

[3] Θετοντας $p_n := \prod_{k=1}^{n}|z_k|$ εχουμε $\lim \frac{p_n}{p} = 1$ αρα $\lim \frac{p}{p_n} = 1$. Επομενως, για καθε $\epsilon \in (0,1)$ υπαρχει n_0 τετοιο ωστε αν $n > m > n_0$ να εχουμε $1 - \epsilon < \frac{p_n}{p} < 1 + \epsilon$ αλλα και $1 - \epsilon < \frac{p}{p_m} < 1 + \epsilon$ αρα $(1-\epsilon)^2 < \frac{p_n}{p_m} < (1+\epsilon)^2$ οποτε $1 - \frac{p_n}{p_m} < 2\epsilon - \epsilon^2 < 2\epsilon$. Συνεπως, για καθε $n > m > n_0$,

$$\|B_n - B_m\|^2 = 2 - 2\prod_{k=m+1}^{n}|z_k| < 4\epsilon\,,$$

πραγμα που δειχνει οτι η (B_n) ειναι βασικη.

Παρατηρουμε οτι η B_0 *ειναι εσωτερικη συναρτηση:*

Πραγματι, εφοσον $\left\|\tilde{B}_n - \tilde{B}_0\right\|_{\tilde{H}^2} \to 0$ (δηλαδη, ως προς τη νορμα του $L^2(\mathbb{T})$) υπαρχει υπακολουθια (B_{k_n}) ωστε $\lim_n \tilde{B}_{k_n}(e^{it}) = \tilde{B}_0(e^{it})$ σχεδον για καθε t, οποτε $|\tilde{B}_0(e^{it})| = \lim_n |\tilde{B}_{k_n}(e^{it})| = 1$ σ.π. αφου οι B_n ειναι εσωτερικες συναρτησεις.

Ισχυρισμος 2. Το απειρογινομενο $\prod_{k=1}^{\infty} \phi_k$ συγκλινει (στη συναρτηση B_0) ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα του $\mathbb{D}$.

Αποδειξη Ισχυρισμου 2. Εστω $r \in (0,1)$, οπότε $\overline{B(0,r)} \subset \mathbb{D}$. Αρκει να δειξουμε ομοιομορφη συγκλιση στην $B(0,r)$. Γιατι αν K ειναι συμπαγες υποσυνολο του $\mathbb{D}$, υπαρχει $r \in (0,1)$ ωστε $K \subset B(0,r) \subseteq \overline{B(0,r)} \subseteq \mathbb{D}$.

Παρατηρουμε κατ' αρχας οτι απο την υποθεση $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$ εχουμε $|z_n| \to 1$, επομενως το πληθος των σημειων z_n που περιεχονται στην $\overline{B(0,r)}$ ειναι πεπερασμενο.

• Ας υποθεσουμε πρωτα οτι κανενα z_n δεν ανηκει στην κλειστη μπαλα $\overline{B(0,r)}$. Αυτο σημαινει οτι καμμια ϕ_n δεν εχει ριζες στην $B(0,r)$, αρα το ιδιο ισχυει και για τις B_n. Εφαρμοζουμε το θεωρημα του Hurwitz στον τοπο $B(0,r)$: Αφου $\lim_n \|B_n - B_0\|_{H^2} = 0$, επεται, οπως ξερουμε, οτι $B_n(z) \to B_0(z)$ ομοιομορφα στα συμπαγη (του $\mathbb{D}$ αρα και) της $B(0,r)$. Αλλα η B_0 δεν ειναι η μηδενικη συναρτηση στην $B(0,r)$, αλλιως θα ηταν ταυτοτικα μηδεν στον $\mathbb{D}$ (απο την αρχη της ταυτοτητας) ενω η συνοριακη της συναρτηση $\tilde{B}_0$ δεν ειναι μηδεν (ειναι εσωτερικη). Επεται απο το θεωρημα του Hurwitz οτι η B_0 δεν εχει καμμια ριζα στην $B(0,r)$. Με αλλα λογια, για καθε $z \in B(0,r)$, τα μερικα γινομενα $B_n(z)$ συγκλινουν στον *μη μηδενικο* μιγαδικο αριθμο $B_0(z)$, πραγμα που σημαινει ακριβως οτι $\prod_{k=1}^{\infty} \phi_k(z) = B_0(z)$. Η συγκλιση ειναι ομοιομορφη στα συμπαγη υποσυνολα της $B(0,r)$, οπως παρατηρησαμε.

• Υποθετουμε τωρα οτι οι ριζες $\{z_1, \dots, z_N\}$, και μονον αυτες, ανηκουν στην $\overline{B(0,r)}$, οπότε $|z_m| > r$ οταν $m > N$. Επαναλαμβανουμε τα ιδια επιχειρηματα, για την ακολουθια $(\phi_n)_{n>N}$: τα μερικα γινομενα $B'_n(z) := \prod_{k=N+1}^{n} \phi_k(z)$ δεν εχουν καμμια ριζα στην $B(0,r)$, επομενως το οριο τους $B'_0(z) := \lim_n B'_n(z)$ (το οποιο, οπως πριν, δεν μπορει να ειναι ταυτοτικα μηδεν, αφου ειναι οριο ακολουθιας εσωτερικων συναρτησεων) δεν εχει καμια ριζα στην $B(0,r)$. Αυτο δειχνει οτι για καθε $z \in B(0,r)$ το οριο $B'_0(z) = \prod_{k=N+1}^{\infty} \phi_k(z)$ υπαρχει και ειναι μη-μηδενικος μιγαδικος αριθμος.

Επεται οτι

$$B_0(z) = \left(\prod_{k=1}^{N} \phi_k(z)\right) B'_0(z) = \left(\prod_{k=1}^{N} \phi_k(z)\right)\left(\prod_{k=N+1}^{\infty} \phi_k(z)\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \phi_k(z)$$

οπου το απειρογινομενο συγκλινει για καθε $z \in B(0,r)$, ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα, και μηδενιζεται ακριβως στα σημεια $\{z_1, \dots, z_N\}$.

Ο Ισχυρισμος 2 αποδειχθηκε.

Δειχνουμε οτι

$$Z(B_0) = \{z_1, \dots, z_n, \dots\}.$$

Για καθε z_k εχουμε $B_0(z_k) = 0$ (γιατι $B_n(z_k) = 0$ για καθε $n \geq k$), αρα $Z(B_0) \supseteq \{z_1, \dots, z_n, \dots\}$.

Αλλα η B_0 δεν μπορει να μηδενιζεται σε κανενα $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$, γιατι το z_0 ανηκει σε καποια μπαλα $B(0, r)$, και μολις ειδαμε οτι οι ριζες της B_0 στην $B(0, r)$ αναγκαστικα ανηκουν στο συνολο $\{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$. Επομενως $Z(B_0) = \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$.

Δειχνουμε τελος οτι η πολλαπλοτητα καθε ριζας $\hat{z} \in Z(B)$ ειναι ακριβως ιση με το πληθος $s_{\hat{z}}$ των ορων ϕ_k στους οποιους το $\hat{z}$ εμφανιζεται. (Ο αριθμος $s_{\hat{z}}$ ειναι βεβαιως πεπερασμενος: καθε ριζα μιας μη μηδενικης ολομορφης συναρτησης στον τοπο $\mathbb{D}$ εχει πεπερασμενη πολλαπλοτητα.)

Πραγματι, αν γραψουμε

$$B_0(z) = \left(\prod_{z_k = \hat{z}} \phi_k(z) \right) \left(\prod_{z_k \neq \hat{z}} \phi_k(z) \right)$$

ειναι σαφες οτι η πολλαπλοτητα της $\hat{z}$ ειναι τουλαχιστον ιση με το πληθος $s_{\hat{z}}$ των ορων που εμφανιζονται στο πρωτο γινομενο.

Αλλα δεν μπορει να ειναι μεγαλυτερη, γιατι το δευτερο (απειρο-) γινομενο δεν μηδενιζεται στο $\hat{z}$, οπως φαινεται εφαρμοζοντας το ιδιο επιχειρημα οπως προηγουμενως (οταν δειξαμε οτι $Z(B_0) \subseteq \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$), αυτη τη φορα στην ακολουθια $\{z_n\}$ χωρις τους ορους για τους οποιους $z_k = \hat{z}$ (που εχουν πεπερασμενο πληθος).

Επομενως η πολλαπλοτητα του $\hat{z}$ ως ριζας της B_0 (αρα και της B) ισουται ακριβως με το πληθος των ορων που εμφανιζονται στον πρωτο παραγοντα. $\square$