Ασκηση: Η εκθετικη συναρτηση

Αποδειξτε τις επομενες προτασεις, με χρηση εργαλειων Απειροστικου λογισμου αποκλειστικα.
Για συμβολισμους μιγαδικων αριθμων, μπορειτε να συμβουλευτειτε το αρχειο complexn.pdf.

1. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, οριζουμε
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$
Η σειρα συγκλινει απολυτα για καθε $z \in \mathbb{C}$ και ομοιομορφα σε καθε φραγμενο υποσυνολο του $\mathbb{C}$. Συνεπως η συναρτηση $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ειναι συνεχης.

2. Αποδεικνυεται απο την απολυτη συγκλιση της σειρας οτι
$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}\,.$$
Οριζουμε $e := \exp(1)$.

Εχουμε $e^x = \exp(x)$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Η *μιγαδικη παραγωγος*
$$\exp'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$
υπάρχει για καθε $z \in \mathbb{C}$ και ισουται με $\exp(z)$.

4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ εχουμε $\exp(z)\exp(-z) = 1$ αρα $\exp(z) \neq 0$.

5. Ο περιορισμος της $\exp$ στην ευθεια $\mathbb{R}$ ειναι γνησιως αυξουσα συνάρτηση που απεικονιζει το $\mathbb{R}$ ομοιομορφικα επι του $\mathbb{R}_+$.

6. Για καθε $t \in \mathbb{R}$ εχουμε $|e^{it}| = 1$ δηλαδη $e^{it} \in \mathbb{T}$. Οριζουμε
$$\cos t := \mathrm{Re}(e^{it}), \qquad \sin t := \mathrm{Im}(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$
αρα
$$e^{it} = \cos t + \imath \sin t \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$
και επεται οτι οι cos και sin είναι παραγωγισιμες συναρτησεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$$\cos' t = -\sin t, \qquad \sin' t = \cos t\,.$$

7. Υπαρχει θετικος αριθμος π ωστε $e^{i\pi/2} = i$
και $e^z = 1$ αν-ν $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.

8. Η exp ειναι περιοδικη συναρτηση με περιοδο $2\pi i$.

9. Η $y \to e^{iy}$ απεικονιζει το $\mathbb{R}$ επι του $\mathbb{T}$:
για καθε $w \in \mathbb{T}$ υπαρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{iy} = w$.

10. Η exp απεικονιζει το $\mathbb{C}$ επι του $\mathbb{C}\backslash\{0\}$:
για καθε $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ υπαρχει $z \in \mathbb{C}$ ώστε $e^z = w$.