ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2, 2025-26

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

(παραδοση 18/03/2026)

Άσκηση 1 (για αποδ. Fatou). Εστω

$$K_r(s) := \frac{4(1-r^2)\sin^2 s}{(1-2r\cos s+r^2)^2} = -\frac{2}{r}P_r'(s)\sin s \quad s\in[\pi,\pi], r\in(0,1)$$

(ελεγξτε την ισοτητα!). Δειξτε οτι

$$(a)\ \lim_{r\nearrow 1} K_r(s) = 0 \quad \text{ομοιομορφα ως προς } s\in[\delta,\pi]$$

και οτι

$$(b)\ \int_0^\pi K_r(s)ds = 2\pi \quad \text{για καθε } r<1\,.$$

Άσκηση 2. Ορισμος: Ο χωρος H^∞ αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις $\phi:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ που ειναι ολομορφες και φραγμενες στον ανοικτο δισκο $\mathbb{D}$.

Δειξτε οτι $H^\infty\subseteq H^2$ [υποδειξη: μπορει να χρησιμευσει ο εναλλακτικος ορισμος του H^2], αλλα δεν ισχυει ισοτητα.

Δειξτε επισης οτι ο H^∞ περιεχει καθε συναρτηση που ειναι ολομορφη σε μια ανοικτη περιοχη του κλειστου δισκου $\overline{\mathbb{D}}$.

Άσκηση 3. Δειξτε οτι ο χωρος $(H^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{D}})$ ειναι χωρος Banach (εδω $\|\phi\|_{\mathbb{D}} := \sup\{|\phi(z)| : z\in\mathbb{D}\}$).

Δειξτε επισης οτι αν $f,g\in H^2$ και μια απο τις δυο ανηκει στον H^∞, τοτε $fg\in H^2$.

Άσκηση 4. *(i)* Δωστε παραδειγμα $f,g\in H^2$ ωστε $fg\notin H^2$.

(ii) Αν $f,g\in H^2$ ειναι τετοιες ωστε $fg\in H^2$, να δειχθει οτι $\widetilde{(fg)} = \tilde{f}\tilde{g}$.

Άσκηση 5. Αν $f\in H^2$ και $\tilde{f}\in\widetilde{H}^2$ η αντιστοιχη συνοριακη συναρτηση, δειξτε οτι για καθε $z_0\in\mathbb{D}$ το ολοκληρωμα Lebesgue

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde{f}(e^{it})}{e^{it}-z_0}e^{it}dm(t) \quad (m : \text{μετρο Lebesgue})$$

οριζεται, και ισουται με $f(z_0)$.

Άσκηση 6. Μελετησαμε στην ταξη το φασμα του $S:\ell^2(\mathbb{Z}_+)\to\ell^2(\mathbb{Z}_+) : e_n\mapsto e_{n+1}$ $(n\geqslant 0)$.

Συγκρινετε με τον $W:\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z}) : e_n\mapsto e_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$:

Δειξτε οτι $\sigma(W)=\sigma(W^*)=\mathbb{T}$ και οτι $\sigma_p(W)=\varnothing$. Τι μπορειτα να πειτε για το $\sigma_p(W^*)$;

Άσκηση 7. Αν $\lambda\in\mathbb{D}$ και $x_\lambda=(1,\lambda,\lambda^2,\dots)$, ο χωρος

$$E_n(\lambda) := \{x_\lambda, S(x_\lambda),\dots,S^{n-1}(x_\lambda)\}^\perp \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

ειναι S-αναλλοιωτος.

Άσκηση 8. Για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, τα διανυσματα $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \ldots, \}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμικη τους θηκη ισουται με $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Άσκηση 9. Το συνολο $\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$ παραγει τον χωρο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ (δηλ. η κλειστη γραμμικη του θηκη ειναι ολος ο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Ειναι το συνολο αυτο γραμμικα ανεξαρτητο;

Άσκηση 10 (Προαιρετικη)**.** Δειξτε οτι αν $\|\cdot\|_o$ ειναι μια πληρης νορμα στον H^2 που εχει την ιδιοτητα,

«Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|_o) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ να ειναι συνεχης»

τοτε η $\|\cdot\|_o$ ειναι ισοδυναμη με την αρχικη νορμα του H^2.