

Άσκηση 1. Εστω $w \in \mathbb{D}$ και $\phi_w(e^{it}) = 1 - we^{-it}$.

Δειξτε ότι ο τελεστής T_{ϕ_w} είναι αντιστρεψιμός.

Hint. We have $\bar{\phi}_w = (1 - \bar{w}f_1)$ so $T_{\phi_w}^* = I - \bar{w}T_1$ which is invertible because the series $\sum_{n \geq 0} (\bar{w}T_1)^n$ converges (since $\|\bar{w}T_1\| < 1$) to $(I - \bar{w}T_1)^{-1}$. $\square$

Άσκηση 2. (α) Δειξτε ότι αν $\phi \in L^\infty$, ο τελεστής T_ϕ δεν έχει ποτέ πεπερασμένη τάξη - εκτός βεβαίως αν είναι 0.

(β) Δειξτε ότι ο $T_\phi T_1 - T_1 T_\phi$ έχει τάξη το πολύ 1.

Hint. (α)¹ If $= \sum_{k=1}^N f_k g_k^*$ is Toeplitz, then $(S^*)^n T S^n = T$ for all n , hence $T = \sum_{k=1}^N ((S^*)^n f_k)((S^*)^n g_k)^*$ for all n . But $\lim_n \|(S^*)^n f\|_2 = 0$ for all f (easily seen), hence each rank one term goes to zero. Thus $T = 0$.

(β) We have $T_\phi T_1 - T_1 T_\phi = T_\phi S - S(S^* T_\phi S) = (T_\phi S) - S S^*(T_\phi S) = (I - S S^*) T_\phi S = P_0 T_\phi S$ where P_0 is the (rank one) projection onto f_0 . $\square$

Άσκηση 3. Prove that $T_{\bar{\phi}\psi} - T_{\bar{\phi}} T_\psi$ is a compact operator if at least one of ϕ and ψ is the sum of a function in $\tilde{H}^\infty$ and a function continuous on the circle S^1 . (Hint: In the continuous case, this can be established by approximating the continuous function by trigonometric polynomials and using the previous exercise. It can then be shown that adding a function in $\tilde{H}^2$ does not change $T_{\bar{\phi}\psi} - T_{\bar{\phi}} T_\psi$).

Hint. Case (1) Suppose that $\phi \in \tilde{H}^\infty$. Then $T_{\bar{\phi}} T_\psi = T_{\bar{\phi}\psi}$ hence $T_{\bar{\phi}\psi} - T_{\bar{\phi}} T_\psi = 0 \in \mathcal{K}$.

Case (2a) Suppose that $\phi = f_k$ with $k \in \mathbb{Z}$. If $k \geq 0$ then f_k is in $\tilde{H}^\infty$ hence we are done by case (1).

If $k = -n < 0$ then $T_{\bar{\phi}} = T_{f_n} = S^n$ and we have $(S^n)^* T_\psi S^n = T_\psi$, so

$$(S^n)^*(T_\psi S^n - S^n T_\psi) = T_\psi - (S^n)^* S^n T_\psi = T_\psi - T_\psi = 0.$$

Thus $\text{ran}(T_\psi S^n - S^n T_\psi) \subseteq \ker(S^n)^*$ which is n -dimensional; thus $T_\psi S^n - S^n T_\psi = T_\psi T_{f_n} - T_{f_n} T_\psi$ has finite rank, hence is compact. But since $f_n \in \tilde{H}^\infty$ we have $T_\psi T_{f_n} = T_{\psi f_n} = T_{f_n \psi}$ and so $T_{f_n \psi} - T_{f_n} T_\psi$ is compact, όπως θελάμε.

Case (2b) Suppose that $\phi \in C(\mathbb{T})$. Since ϕ is in the $\|\cdot\|_\infty$ -closed linear span of $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ and the map $\phi \mapsto T_\phi$ is linear and continuous (recall that $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$) the compactness of $T_{\bar{\phi}\psi} - T_{\bar{\phi}} T_\psi$ follows from Case (2a).

Case (3) The case when $\phi \in \tilde{H}^\infty + C(\mathbb{T})$ now follows from Cases (1) and (2) by linearity.

Case (4) Suppose that $\psi \in \tilde{H}^\infty$. Then $(T_{\bar{\phi}\psi} - T_{\bar{\phi}} T_\psi)^* = T_{\bar{\psi}\phi} - T_{\bar{\psi}} T_\phi$ is compact by the previous case, hence so is its adjoint $T_{\bar{\phi}\psi} - T_{\bar{\phi}} T_\psi$. $\square$

Άσκηση 4. Δειξτε ότι αν ένας μη-μηδενικός τελεστής Toeplitz $T \in \mathcal{B}(H^2)$ δεν είναι 1-1, τότε:

(α) Υπάρχει στο σύνολο τιμών του μια $g \in H^2$ με $g(0) \neq 0$.

(β) Η σταθερή συναρτηση ανήκει στο σύνολο τιμών του.

(γ) Το σύνολο τιμών του περιέχει κάθε πολυώνυμο.

Hint. (α) Since T_ϕ is not 1-1, T_ϕ^* must be 1-1 by Coburn, hence $T_\phi^*(\mathbf{1}) \neq 0$. Hence there is an $f \in H^2$ with $\langle T_\phi^*(\mathbf{1}), f \rangle \neq 0$, so $\langle \mathbf{1}, T_\phi(f) \rangle \neq 0$. Thus the function $g := T_\phi(f)$ is not orthogonal to the constant function $\mathbf{1}$, i.e. the constant term in its power series is nonzero.

¹Al., Tak!

(β) Με απαγωγή στο άτοπο: Αν η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών του T_ϕ , τότε για κάθε μη μηδενική $f \in H^2$ θα έχουμε $T_\phi(f) \notin \text{span } \mathbf{1}$, άρα $SS^*T_\phi(f) \neq 0$. Ειδικότερα για κάθε μη μηδενική $h \in H^2$ θα έχουμε $SS^*T_\phi Sh \neq 0$. Ομως $S^*T_\phi S = T_\phi$, οπότε $ST_\phi h \neq 0$. Αυτό δείχνει ότι ο ST_ϕ είναι 1-1, άρα και ο T_ϕ είναι 1-1, σε αντίθεση με την υποθεση. $\square$

(γ) Με επαγωγή: Δειξάμε στο (β) την περίπτωση $n = 0$.

Αν $n \geq 1$, υποθετοντας ότι $f_{n-1} \in \text{Ran}(T_\phi)$, να δειξουμε ότι $f_n \in \text{Ran}(T_\phi)$:

There exists $g \in H^2$ with $T_\phi g = f_{n-1}$, hence $f_n = Sf_{n-1} = ST_\phi g$. But from Exercise 2(β) we have $T_\phi S - ST_\phi = P_0 T_\phi S$ and so

$$f_n = Sf_{n-1} = ST_\phi g = T_\phi Sg - P_0 T_\phi Sg \in \text{span}(\text{Ran}(T_\phi), \mathbf{1}).$$

Since by (β) $\mathbf{1} \in \text{Ran}(T_\phi)$, it follows that $f_n \in \text{Ran}(T_\phi)$. $\square$

Άσκηση 5. Εστω $\{e_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ μια ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert H .

Αν ένας φραγμένος τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει ανώ τριγωνικό πίνακα ως προς αυτήν την ορθοκανονική βάση (δηλ. αν $a_{mn} = \langle Ae_n, e_m \rangle = 0$ όταν $m > n$) δείξτε ότι οι αριθμοί $\langle Ae_n, e_n \rangle$ είναι ιδιοτιμές του A . Το ίδιο ισχύει κι όταν ο A έχει κάτω τριγωνικό πίνακα.

Hint. For every $m \in \mathbb{Z}_+$, if $n < m$ we have $\langle Ae_n, e_m \rangle = 0$ and hence $Ae_n \in \text{span}\{e_k : k \leq m\}$. Thus the subspace $E_m := \text{span}\{e_n : n \leq m\}$ is A -invariant. Now the matrix of the operator $A_m := (A - a_{mm}I)|_{E_m}$ is upper triangular, with diagonal entries $a_{nn} - a_{mm}$, $n \leq m$. Hence A_m is not invertible, since the m -th row of its matrix vanishes. Thus there exists a non-zero $x \in E_m$ with $(A - a_{mm}I)(x) = 0$, i.e. $Ax = a_{mm}x$; hence a_{mm} is an eigenvalue of A .

Άσκηση 6. Δείξτε ότι αν ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H^2)$ αφήνει αναλλοίωτο κάθε S -αναλλοίωτο (δηλαδή T_1 -αναλλοίωτο) κλειστό υποχώρο του H^2 τότε είναι αναλυτικός τελεστής Toeplitz, δηλαδή $T = T_\phi$ όπου $\phi \in H^\infty$.

Υποδείξη. Εχουμε δείξει (Άσκηση II.7) ότι ο T μετατίθεται με τον S . Συνεπώς $S^*TS = S^*ST = T$. Αυτό δείχνει, όπως ξερουμε, ότι ο T είναι Toeplitz: υπάρχει $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ώστε $T = T_\phi$.

To show that in fact $\phi \in \tilde{H}^\infty$, we need to prove that $\hat{\phi}(-m) = 0$ for all $m > 0$. But recall that the matrix $[\langle T_\phi f_m, f_n \rangle]$ of T_ϕ is given by $\langle T_\phi f_m, f_n \rangle = \hat{\phi}(n - m)$. Thus, for all $m > 0$,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(-m) &= \langle T_\phi f_m, f_0 \rangle = \langle T_\phi T_1 f_{m-1}, f_0 \rangle \quad (\text{since } m > 0) \\ &= \langle T_1 T_\phi f_{m-1}, f_0 \rangle \quad (\text{by hypothesis}) \\ &= \langle T_\phi f_m, T_1^* f_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

οπώς θέλαμε. $\square$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι κάθε S^* -αναλλοίωτος υποχώρος του H^2 πεπερασμένης διάστασης είναι η γραμμική θήκη των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του S^* που περιέχει (μια $f \in H^2$ λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του S^* αν $f \neq 0$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $(S^* - \lambda I)^n f = 0$).

Δώστε παραδειγμα ενός S^* -αναλλοίωτου υποχώρου πεπερασμένης διάστασης που δεν είναι η γραμμική θήκη των ιδιοδιανυσμάτων του S^* που περιέχει.

Απόδειξη. If $E \subseteq H^2$ is S^* invariant and finite dimensional, then $E^\perp$ is a finite codimensional nonzero S -invariant subspace of H^2 and hence (as we know) of the form ϕH^2 where ϕ is a finite Blaschke product. If $z_k \in \mathbb{D}$ are the distinct roots of ϕ each with multiplicity n_k , we write ϕ in the form

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^n \phi_k^{n_k} \quad \text{where} \quad \phi_k(z) = \frac{z_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} = \chi_k(z) \psi_k(z)$$

where $\psi_k(z) = z - z_k$. Note all these functions are in H^∞ .

We claim that

$$\text{span}\{\ker(S^* - \bar{z}_k I)^{n_k} : k = 1, \dots, n\} = (\phi H^2)^\perp.$$

Note that

$$f \in \phi H^2 \iff f \in \bigcap_k \text{ran } T_{\psi_k}^{n_k}.$$

Indeed if $f \in \phi H^2$ then for some $h \in H^2$ and for each k ,

$$f = \phi h = \prod_{m=1}^n \psi_k^{n_m} \chi_m^{n_m} h = \psi_k^{n_k} \left(\chi_k^{n_k} \prod_{m \neq k} \psi_m^{n_m} \chi_m^{n_m} h \right) = \psi_k^{n_k} h_k$$

(note that $h_k \in H^2$ since the multiplier of h is in H^∞); thus $f = T_{\psi_k}^{n_k} h_k \in \text{ran } T_{\psi_k}^{n_k}$ for each k ,

so $f \in \bigcap_k \text{ran } T_{\psi_k}^{n_k}$.

Conversely if $f \in \bigcap_k \text{ran } T_{\psi_k}^{n_k}$ then for each k there is $g_k \in H^2$ with $f(z) = (z - z_k)^{n_k} g_k(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Thus each z_k is a root of f of multiplicity at least n_k . It follows by standard complex analysis that there exists a holomorphic function h_0 on $\mathbb{D}$ such that $f(z) = \prod_k (z - z_k)^{n_k} h_0(z)$, and so $f = \phi h$ where

$h = (\prod_k \chi_k^{n_k})^{-1} h_0$ (note that h is well defined on $\mathbb{D}$ and holomorphic).

It remains to show that $h \in H^2$. For this, let $r_0 < 1$ be such that $r_0 > \max_k \{z_k\}$. Then ϕ is continuous and never vanishes in $F_0 := \{z \in \mathbb{D} : |z| \geq r_0\}$, so $\epsilon := \min\{|\phi(z)| : z \in F_0\}$ is strictly positive. Since $|f(z)| \geq \epsilon |h(z)|$ in F_0 , for each $r \in (r_0, 1)$ we have $\int_{\mathbb{T}} |f(re^{it})|^2 dt \geq \epsilon^2 \int_{\mathbb{T}} |h(re^{it})|^2 dt$ and so $\epsilon^2 \int_{\mathbb{T}} |h(re^{it})|^2 dt \leq 2\pi \|f\|_{H^2}^2$. Taking sup over r we get $\epsilon \|h\|_{H^2} \leq \|f\|_{H^2} < \infty$ as claimed. Thus $f = \phi h \in \phi H^2$.

Now from the equality

$$\phi H^2 = \bigcap_k \text{ran } T_{\psi_k}^{n_k}$$

we obtain ²

$$(\phi H^2)^\perp = \left(\bigcap_k \text{ran } T_{\psi_k}^{n_k} \right)^\perp = \overline{\text{span}\{\text{ran } T_{\psi_k}^{n_k}\}^\perp} = \overline{\text{span}\{\ker(T_{\psi_k}^{n_k})^* : k = 1, \dots, n\}},$$

but the linear span of finitely many finite dimensional subspaces is closed, so finally

$$(\phi H^2)^\perp = \text{span}\{\ker(T_{\psi_k}^{n_k})^* : k = 1, \dots, n\},$$

which is what we wanted, since $T_{\psi_k}^* = (S^* - \bar{z}_k I)$. □

Παραδειγμα ενός S^ -αναλλοιωτου υποχωρου πεπερασμενης διαστασης που δεν ειναι η γραμμικη θηκη των ιδιοδιανυσματων του S^* που περιεχει:* Consider the two-dimensional space $(f_2^2 H^2)^\perp = \ker(S^*)^2$. The eigenvectors of S^* are k_λ , $\lambda \in \mathbb{D}$. The only one of these contained in $\ker(S^*)^2$ is $k_0 = f_0$. (Actually $\ker(S^*)^2$ is spanned by f_0 , an eigenvector and f_1 , a generalized eigenvector.) □

Άσκηση 8. Παρατηρουμε οτι αν $m, n \in \mathbb{Z}$ ο τελεστής πρώτης τάξης $f_m f_n^*$ έχει πίνακα ως προς την ΟΚ βάση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ του $L^2(\mathbb{T})$ που έχει 1 στην (m, n) -θέση και μηδενικά παντού αλλού. Δηλαδή η γραμμικη θηκη $\mathcal{F} := \text{span}\{f_m f_n^* : m, n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελείται από τους τελεστές που έχουν πίνακες με πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών γραμμών και στηλών, επομένως δεν περιέχει όλους τους τελεστές πεπερασμένης τάξης. Δώστε ένα συγκεκριμένο παραδειγμα.

Δειξτε οτι παρολα αυτά η κλειστη θηκη του $\mathcal{F}$ περιέχει κάθε τελεστή πεπερασμένης τάξης: κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης προσεγγίζεται από γραμμικούς συνδυασμούς τελεστών της μορφής $f_m f_n^*$.

Hint. Observe first that the operator $f_m f_n^*$ lies in the subspace $P_k \mathcal{B}(L^2 \mathbb{T}) P_k$ where $k = \max(|m|, |n|)$ and P_k is the projection onto the subspace $\text{span}\{f_i : |i| \leq k\}$. Thus if, say, $f = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} f_k$, the rank one operator $f f^*$ lies in no subspace $P_k \mathcal{B}(L^2 \mathbb{T}) P_k$ and hence cannot lie in $\mathcal{F}$.

On the other hand every g and $h \in L^2(\mathbb{T})$ can be approximated in $\|\cdot\|_2$ by the partial sums g_n, h_n of their Fourier series ($g_n := \sum_{|k| \leq n} \hat{g}(k) f_k$). It follows that

$$\|gh^* - g_n h_n^*\|_{\mathcal{B}} = \|g(h - h_n)^* + (g - g_n)h_n^*\|_{\mathcal{B}} \leq \|g\|_2 \|h - h_n\|_2 + \|g - g_n\|_2 \|h_n\|_2 \rightarrow 0$$

(here we have used the easy fact that $\|gh^*\|_{\mathcal{B}} \leq \|g\|_2 \|h\|_2$). Thus $gh^* = \lim_n g_n h_n^*$ is in the closure of $\mathcal{F}$, όπως θελαμε. □

²using $f \in \ker T^* \iff \langle f, Th \rangle = \langle T^* f, h \rangle = 0 \forall h \iff f \perp \text{ran } T$.