ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2, 2025-26

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ

Άσκηση 1. Εστω $w \in \mathbb{D}$ και $\phi_w(e^{it}) = 1 - we^{-it}$.
Δειξτε οτι ο τελεστης T_{ϕ_w} ειναι αντιστρεψιμος.

Άσκηση 2. (α) Δειξτε οτι αν $\phi \in L^\infty$, ο τελεστης T_ϕ δεν εχει ποτε πεπερασμενη ταξη - εκτος βεβαιως αν ειναι 0.
(β) Δειξτε οτι ο $T_\phi T_1 - T_1 T_\phi$ εχει ταξη το πολυ 1.

Για την επομενη Ασκηση, μπορειτε να χρησιμοποιησετε οτι ενας τελεστης σε χωρο Hilbert H ειναι συμπαγης αν-ν ειναι οριο (ως προς τη νορμα του $B(H)$) ακολουθιας τελεστων πεπερασμενης ταξης.

Άσκηση 3. Prove that $T_{\overline{\phi}\psi} - T_{\overline{\phi}} T_\psi$ is a compact operator if at least one of ϕ and ψ is the sum of a function in $\widetilde{H}^\infty$ and a function continuous on the circle S^1. (Hint: In the continuous case, this can be established by approximating the continuous function by trigonometric polynomials and using the previous exercise. It can then be shown that adding a function in $\widetilde{H}^2$ does not change $T_{\overline{\phi}\psi} - T_{\overline{\phi}} T_\psi$).

Άσκηση 4. Δειξτε οτι αν ενας μη-μηδενικος τελεστης Toeplitz $T \in \mathcal{B}(H^2)$ δεν ειναι 1-1, τοτε υπαρχει στο συνολο τιμων του μια $g \in H^2$ με $g(0) \neq 0$.

Άσκηση 5. Εστω $\{e_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ μια ορθοκανονικη βαση ενος χωρου Hilbert H.
Αν ενας φραγμενος τελεστης $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει ανω τριγωνικο πινακα ως προς αυτην την ορθοκανονικη βαση (δηλ. αν $\langle Ae_n, e_m \rangle = 0$ οταν $m > n$), δειξτε οτι οι αριθμοι $\langle Ae_n, e_n \rangle$ ειναι ιδιοτιμες του A.
Το ιδιο ισχυει κι οταν ο A έχει κατω τριγωνικο πινακα.

Άσκηση 6. Δειξτε οτι αν ενας τελεστης $T \in \mathcal{B}(H^2)$ αφηνει αναλλοιωτο καθε S-αναλλοιωτο (δηλαδη T_1-αναλλοιωτο) κλειστο υποχωρο του H^2 τοτε ειναι αναλυτικος τελεστης Toeplitz, δηλαδη $T = T_\phi$ οπου $\phi \in H^\infty$.

Άσκηση 7. Δειξτε οτι καθε S^*-αναλλοιωτος υποχωρος του H^2 πεπερασμενης διαστασης ειναι η γραμμικη θηκη των γενικευμενων ιδιοδιανυσματων του S^* που περιεχει (μια $f \in H^2$ λεγεται γενικευμενο ιδιοδιανυσμα του S^* αν $f \neq 0$ και υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ωστε $(S^* - \lambda I)^n f = 0$).
Δωστε παραδειγμα ενος S^*-αναλλοιωτου υποχωρου πεπερασμενης διαστασης που δεν ειναι η γραμμικη θηκη των ιδιοδιανυσματων του S^* που περιεχει.