ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2 (2024-25)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ

Άσκηση 1. Δειξτε οτι αν μια $f \in \widetilde{H}^2$ ικανοποιει $\bar{f} \in \widetilde{H}^2$, τοτε ειναι σχεδον παντου ιση με την cf_0, οπου c μια (πραγματικη) σταθερα.
[Μονο για υπενθυμιση: Εχει ηδη γινει και χρησιμοποιηθει στην ταξη.]

Άσκηση 2. Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $M_\phi \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ ο αντιστοιχος πολλαπλασιαστικος τελεστης. Δειξτε οτι ο υποχωρος $\widetilde{H}^2 \subseteq L^2$ είναι M_ϕ-αναλλοιωτος αν και μονον αν $\phi \in \widetilde{H}^2$, αν και μονον αν υπαρχει $\psi \in H^\infty$ ωστε $\widetilde{\psi} = \phi$.

Άσκηση 3. Οριζουμε

$$\widetilde{H}^1 := \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \hat{f}(-k) = 0 \ \forall k > 0\}.$$

Δειξτε οτι αν $f, g \in \widetilde{H}^2$ τοτε $fg \in \widetilde{H}^1$.

Άσκηση 4. Δειξτε οτι αν ενας κλειστος υποχωρος $E \subseteq L^2(\mathbb{T})$ ειναι M_1-αναλλοιωτος, τοτε ή $M_1(E) = E$ ή αλλιως $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M_1^n(E) = \{0\}$.

Άσκηση 5. Να βρεθει η παραγοντοποιηση σε γινομενο εξωτερικης και εσωτερικης συναρτησης για την $f(z) = z - \lambda$ στις περιπτωσεις (α) $|\lambda| < 1$, (β) $|\lambda| = 1$ και (γ) $|\lambda| > 1$.

Άσκηση 6. Δειξτε οτι ενα πολυωνυμο $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$ ειναι εξωτερικη συναρτηση (ως στοιχειο του χωρου H^2) αν και μονον αν δεν εχει καμμια ριζα στο $\mathbb{D}$. Μπορειτε να γενικευσετε για την περιπτωση που η f ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του $\overline{\mathbb{D}}$;

Άσκηση 7 (Προαιρετικα)**.** Μια συναρτηση $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ λεγεται *πολλαπλασιαστης (multiplier)* του χωρου H^2 αν ικανοποιει $hf \in H^2$ για καθε $f \in H^2$. Δειξτε οτι τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:
(α) Η h ειναι πολλαπλασιαστης του χωρου H^2.
(β) Η απεικονιση $f \mapsto hf$ οριζει *φραγμενο* τελεστη $H^2 \to H^2$.
(γ) $h \in H^\infty$.