ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2, 2024-25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

Άσκηση 1. Ο χωρος H^∞ αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ που ειναι ολομορφες και φραγμενες στον ανοικτο δισκο $\mathbb{D}$.

Δειξτε οτι $H^\infty \subseteq H^2$ [υποδειξη: μπορει να χρησιμευσει ο εναλλακτικος ορισμος του H^2], αλλα δεν ισχυει ισοτητα.

Δειξτε επισης οτι ο H^∞ περιεχει καθε συναρτηση που ειναι ολομορφη σε μια ανοικτη περιοχη του κλειστου δισκου $\overline{\mathbb{D}}$.

Άσκηση 2. Δειξτε οτι ο χωρος $(H^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{D}})$ ειναι χωρος Banach (εδω $\|\phi\|_{\mathbb{D}} := \sup\{|\phi(z)| : z \in \mathbb{D}\}$).

Δειξτε επισης οτι αν $f, g \in H^\infty$ τοτε $f.g \in H^\infty$, και οτι αν $f \in H^\infty$ και $h \in H^2$ τοτε $f.h \in H^2$.

Άσκηση 3. *(i)* Δωστε παραδειγμα $f, g \in H^2$ ωστε $fg \notin H^2$.

(ii) Αν $f, g \in H^2$ ειναι τετοιες ωστε $fg \in H^2$, να δειχθει οτι $\widetilde{(fg)} = \tilde{f}\tilde{g}$.

Άσκηση 4. Αν $f \in H^2$ και $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ η αντιστοιχη συνοριακη συναρτηση, δειξτε οτι για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ το ολοκληρωμα Lebesgue

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{it})}{e^{it} - z_0} e^{it} dm(t) \quad (m : \text{μετρο Lebesgue})$$

οριζεται, και ισουται με $f(z_0)$.

Άσκηση 5. Μελετησαμε στην ταξη το φασμα του $S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+) : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \geqslant 0)$.

Συγκρινετε με τον $W : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$:

Δειξτε οτι $\sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}$ και οτι $\sigma_p(W) = \varnothing$. Τι μπορειτα να πειτε για το $\sigma_p(W^*)$;

Οι επομενες δυο Ασκησεις ειναι προαιρετικες, για οσες/ους ενδιαφερονται.

Άσκηση 6. Δειξτε οτι αν $\phi \in L^1([-\pi, \pi])$ και ορισουμε για $(r\cos t, r\sin t) \in \text{ball}\,\mathbb{R}^2$ τη συναρτηση

$$f(r\cos t, r\sin t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t-x)P_r(x)dx$$

τοτε η f ειναι απεριοριστα παραγωγισιμη και ικανοποιει τη διαφορικη εξισωση του Laplace $\nabla^2 f = 0$.

Άσκηση 7. Δειξτε οτι αν $\|\cdot\|_o$ ειναι μια πληρης νορμα στον H^2 που εχει την ιδιοτητα,

«Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|_o) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ να ειναι συνεχης»

τοτε η $\|\cdot\|_o$ ειναι ισοδυναμη με την αρχικη νορμα του H^2.