Ο H^2 δεν ειναι αλγεβρα

Υπαρχουν[1] $f \in H^2$ *με* $f^2 \notin H^2$*:*

Παραδειγμα 1. [Φ.Π.] Εστω $\epsilon > 0$. Η δυναμοσειρα

$$f_\epsilon(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} z^n$$

οριζει f_ϵ στον H^2 γιατι οι συντελεστες της αποτελουν τετραγωνικα αθροισιμη ακολουθια: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1+2\epsilon}} < \infty$ αφου $1 + 2\epsilon > 1$.

Ομως, αν επιλεξουμε $\epsilon > 0$ αρκετα μικρο, η συναρτηση f_ϵ^2 (ενω οριζεται και ειναι ολομορφη στον δισκο $\mathbb{D}$) δεν ανηκει στον H^2 γιατι οι συντελεστες της δυναμοσειρας δεν αποτελουν τετραγωνικα αθροισιμη ακολουθια.

Πραγματι, εφοσον η δυναμοσειρα συγκλινει απολυτα για καθε $z \in \mathbb{D}$, εχουμε απο το θεωρημα Mertens :

$$\begin{aligned}
(f_\epsilon(z))^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} z^m\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{οπου} \\
c_k &= \sum_{n+m=k} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{(m+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{(k-n+1)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} .
\end{aligned}$$

Ομως απο την ανισοτητα $2ab \le (a+b)^2$ για θετικους a, b εχουμε

$$2(n+1)(k-n+1) \le (k+2)^2$$

οποτε

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(k-n+1)}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} \\
&\ge \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{2}{(k+2)^2}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} \\
&= (k+1)\left(\frac{2}{(k+2)^2}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} = \frac{k+1}{k+2} \frac{2^\epsilon\sqrt{2}}{(k+2)^{2\epsilon}} \\
&\ge \frac{2^\epsilon\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(k+2)^{2\epsilon}}
\end{aligned}$$

αφου $\frac{k+1}{k+2} \ge \frac{1}{2}$. Εχουμε λοιπον

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \ge \frac{4^\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^{4\epsilon}}$$

το οποιο, αν διαλεξουμε $0 < \epsilon \le \frac{1}{4}$, απειριζεται.

Παραδειγμα 2. [Α.Δ.] Εστω $f(z) := (1-z)^{-1/4} := \exp(-\frac{1}{4}\log(1-z))$ οπου log ο κυριος κλαδος του λογαριθμου. Αποδεικνυεται στο βιβλιο των Martinez-Avendaño & Rosenthal (πρβγ. 1.1.14) οτι η f ανηκει στον H^2. Μπορει κανεις να δειξει, εκτιμωντας το $\int_{-\pi}^{\pi} |f^2(re^{it})|^2 dt$ καθως $r \nearrow 1$, οτι η f^2 δεν ανηκει στον H^2.

[1] H2notalg, 3 Νοεμβρίου 2024. Ευχαριστιες στον ΦΠ και στον ΑΔ!