ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2 (Θ.23α-711)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Άσκηση 1. Αν $E_1, \dots E_n, \dots$ ειναι *μη μηδενικοι* κλειστοι S-αναλλοιωτοι υποχωροι του H^2, δειξτε οτι για καθε $n \in \mathbb{N}$ η τομη $E_1 \cap \cdots \cap E_n$ ειναι μη μηδενικη.
Δωστε ενα παραδειγμα στο οποιο η τομη $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i = \{0\}$ καθως και ενα παραδειγμα στο οποιο η τομη $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \neq \{0\}$.

Άσκηση 2. Για να δειξουμε οτι αν ενας φραγμενος τελεστης $A \in \mathcal{B}(\widetilde{H}^2)$ εχει πινακα Toeplitz ως προς την ο/κ βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, τοτε ειναι τελεστης Toeplitz, ορισαμε τους τελεστες $A_n = W^{-n}APW^n$. Δείξτε οτι $\|A_n\| = \|A\|$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3. Εστω $w \in \mathbb{D}$ και $\phi_w(e^{it}) = 1 - we^{-it}$.
Δειξτε οτι ο τελεστης T_{ϕ_w} ειναι αντιστρεψιμος.

Άσκηση 4. Εστω $\phi \in L^\infty$.
(α) Δειξτε οτι ο τελεστης $T_\phi := PM_\phi|_{\widetilde{H}^2}$ ειναι ισομετρια αν-ν η ϕ ειναι εσωτερικη συναρτηση. (Συγκρινετε με την ασκηση ΙΙΙ.4)
(β) Δειξτε οτι ο T_ϕ ειναι unitary (= ισομετρια και επι) αν-ν η ϕ ειναι (σ.π.) σταθερη.

Άσκηση 5. Δειξτε οτι αν $\phi \in L^\infty$, ο τελεστης $T_\phi T_1 - T_1 T_\phi$ εχει ταξη το πολυ 1. (Συγκριση: ο T_ϕ δεν εχει ποτε πεπερασμενη ταξη - εκτος βεβαιως αν ειναι 0.)

Οι επομενες τρεις ασκησεις θα χρησιμοποιηθουν για τον εντοπισμο του φασματος τελεστων Toeplitz.

Ορισμός *The Numerical range (αριθμητικο συνολο τιμων;)* ενος τελεστη $A \in \mathcal{B}(H)$ ειναι το συνολο:

$$W(A) = \{\langle Af, f\rangle : f \in H, \|f\| = 1\}.$$

Άσκηση 6 (Θεωρημα Toeplitz - Hausdorff)**.** Το συνολο $W(A)$ ειναι κυρτο υποσυνολο του επιπεδου $\mathbb{C}$.

Υποδειξεις - Παρατηρησεις:

Ενα υποσυνολο του επιπεδου ειναι κυρτο αν-ν η τομη του με καθε ευθεια ειναι συνεκτικο συνολο.

Μπορει να βοηθησει να δει κανεις πρωτα την περιπτωση $\dim H = 2$.

Άσκηση 7. $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$.

Παρατηρηση. Οταν $\dim H = \infty$, το $W(A)$ δεν ειναι παντα κλειστο.

Παραδειγμα - Ασκηση: Αν A ειναι αυτοσυζυγης $n \times n$ πινακας, το $W(A)$ ειναι η κυρτη θηκη των ιδιοτιμων του A.

Άσκηση 8. Αν $\phi \in L^\infty$, τοτε $\overline{W(M_\phi)} = \mathrm{conv}(\sigma(M_\phi))$ (conv= κυρτη θηκη).

Υποδειξη: Η κυρτη θηκη του $\sigma(M_\phi)$ ειναι η τομη ολων των κλειστων ημιχωρων που το περιεχουν.