# ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ $H^2$ (Θ.23α-711)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ

**Άσκηση 1.** Υπενθυμιζουμε τη γραμμικη επι ισομετρια $f \mapsto \widetilde{f} : H^2 \to \widetilde{H}^2$.
Αν $f, g \in H^2$ ειναι τετοιες ωστε $fg \in H^2$, δειξτε οτι $\widetilde{fg} = \widetilde{f}\widetilde{g}$.

**Άσκηση 2.** Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $M_\phi \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ ο αντιστοιχος πολλαπλασιαστικος τελεστης.
Δειξτε οτι ο υποχωρος $\widetilde{H}^2 \subseteq L^2$ είναι $M_\phi$-αναλλοιωτος αν και μονον αν $\phi \in \widetilde{H}^2$,
αν και μονον αν υπαρχει $\psi \in H^\infty$ ωστε $\widetilde{\psi} = \phi$.

**Άσκηση 3.** Δειξτε οτι αν μια $\widetilde{f} \in \widetilde{H}^2$ παιρνει πραγματικες τιμες σχεδον παντου στο $\mathbb{T}$, τοτε ειναι σχεδον παντου ιση με την $cf_0$, οπου $c$ μια (πραγματικη) σταθερα.

**Άσκηση 4.** Δειξτε οτι αν ενας κλειστος υποχωρος $E \subseteq L^2(\mathbb{T})$ ειναι $M_1$-αναλλοιωτος, τοτε
ή $M_1(E) = E$ ή αλλιως $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M_1^n(E) = \{0\}$.

**Άσκηση 5.** Δειξτε οτι ενα πολυωνυμο $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$ ειναι εξωτερικη συναρτηση (ως στοιχειο του χωρου $H^2$) αν και μονον αν δεν εχει καμμια ριζα στο $\mathbb{D}$. Μπορειτε να γενικευσετε για την περιπτωση που η $f$ ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του $\overline{\mathbb{D}}$;

**Άσκηση 6.** Στο μαθημα χρησιμοποιηθηκε ότι, αν ενα αριθμησιμο συνολο $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ ειναι πυκνο στον κυκλο $\mathbb{T}$ και θεωρησουμε τα σημεια $z_n = c_n(1 - \frac{1}{n^2})$, τοτε καθε σημειο του κυκλου $\mathbb{T}$ ειναι σημειο συσσσωρευσης του $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αποδειξη;

**Άσκηση 7** (Προαιρετικα)**.** Μια συναρτηση $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ λεγεται *πολλαπλασιαστης (multiplier)* του χωρου $H^2$ αν ικανοποιει $hf \in H^2$ για καθε $f \in H^2$. Δειξτε οτι τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:
(α) Η $h$ ειναι πολλαπλασιαστης του χωρου $H^2$.
(β) Η απεικονιση $f \mapsto hf$ οριζει *φραγμενο* τελεστη $H^2 \to H^2$.
(γ) $h \in H^\infty$.