




Ο χώρος Hilbert του Hardy
και οι τελεστές του

<https://eclass.uoa.gr/courses/MATH797/>

Χειμερινό Εξάμηνο 2024

-  Rubén A. Martínez-Avendaño and Peter Rosenthal.
An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space, volume 237 of *Graduate Texts in Mathematics*.
Springer, New York, 2007.
-  Vern I. Paulsen and Mrinal Raghupathi.
An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, volume 152 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*.
Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
-  Nikolai K. Nikolski.
Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*.
American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by
Andreas Hartmann.



Kenneth Hoffman.

Banach spaces of analytic functions.

Reprint of the 1962 original.

Dover Publications, Inc., New York, 1988.



William Arveson.

A short course on spectral theory.

Graduate Texts in Mathematics, vol. 209,

Springer-Verlag, New York, 2002.

Πρελουδίο: Η εκθετική συνάρτηση

1. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, ορίζουμε

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Η σειρά συγκλίνει απολυτά για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ομοιομορφα σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{C} . Συνεπώς η συνάρτηση $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής.

2. Αποδεικνύεται από την απολυτή συγκλίση της σειράς ότι

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Ορίζουμε $e := \exp(1)$.

Έχουμε $e^x = \exp(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Η μιγαδική παραγωγός

$$\exp'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$

υπάρχει για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ισούται με $\exp(z)$.

Η εκθετική συνάρτηση

4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε $\exp(z)\exp(-z) = 1$ αρα $\exp(z) \neq 0$.
5. Ο περιορισμός της \exp στην ευθεία \mathbb{R} είναι γνησίως αυξουσα συνάρτηση που απεικονίζει το \mathbb{R} ομοιομορφικά επί του \mathbb{R}_+ .
6. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $|e^{it}| = 1$ δηλαδή $e^{it} \in \mathbb{T}$. Ορίζουμε

$$\cos t := \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \sin t := \operatorname{Im}(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

αρα

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

και επεται οτι οι \cos και \sin είναι παραγωγισιμες συναρτησεις $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$

Η εκθετική συνάρτηση

7. Υπάρχει θετικός αριθμός π ώστε $e^{i\pi/2} = i$
και $e^z = 1$ αν-ν $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.
8. Η \exp είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2\pi i$.
9. Η $y \rightarrow e^{iy}$ απεικονίζει το \mathbb{R} επί του \mathbb{T} :
για κάθε $w \in \mathbb{T}$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{iy} = w$.
10. Η \exp απεικονίζει το \mathbb{C} επί του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:
για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ ώστε $e^z = w$.

Ο Χώρος H^2 του Hardy

Αν $a_n \in \mathbb{C}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ τότε για κάθε $r \in (0, 1)$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ συνεπώς η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολυτα για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και ομοιομορφα σε κάθε δισκο ακτινας $r < 1$, αρα οριζει συναρτηση $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ που μαλιστα εχει μιγαδικη παραγωγο (και καθε ταξης), ειναι δηλαδη **ολομορφη** στον ανοικτο δισκο \mathbb{D} .

Ορισμός

$$H^2 := \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Η $(a_n) \mapsto f : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2$ ειναι γραμμικος ισομορφισμος.¹ Αρα, με το **εσωτερικο γινόμενο** $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$, οπου $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ (και νορμα $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$), ο H^2 ειναι **χωρος Hilbert**.

¹Εξπλεϊν Χουαϊ!

Ορισμός

Έστω E ένας \mathbb{K} -γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C}). Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i) $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Η $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E , άρα η $d(x, y) := \|x - y\|$ είναι μετρική. Ο E λέγεται **χώρος Hilbert** αν ο (E, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Υπενθυμιση: Χώροι Hilbert II

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

όπου $M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in M\}$.

Δηλαδή $\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_\perp$ όπου $y_M \in M, y_\perp \in M^\perp$.

Πυθαγόρειο: $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } y \in H.$$

Ο Χωρος H^2 του Hardy II

Ο H^2 είναι χώρος (ολομορφών) συναρτησεων $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$.

Μεχρι εκεί όμως:

Παράδειγμα

Η $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ανηκει στον H^2 , αλλά δεν επεκτείνεται σε μεγαλύτερο δισκο (δεν ορίζεται καν όταν $z = 1 \in \overline{\mathbb{D}}$).

Παράδειγμα

Η $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (ορίζεται και) είναι ολομορφη στο \mathbb{D} , αλλά δεν ανηκει στον H^2 .

Ο Χωρος H^2 του Hardy III

Θεώρημα

Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ειναι συνεχης. Μαλιστα, $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in H^2$, οπου $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$.

Πρβλ:

Παρατήρηση

Στον χωρο $C([0, 1])$ με εσωτ. γινομενο $\langle f, g \rangle := \int f(t) \overline{g(t)} dt$ η απεικονιση $f \mapsto f(1) : (C([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ΔΕΝ ειναι συνεχης.

Ο Χώρος H^2 του Hardy III

Πρόταση

Αν $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ στον H^2 , τότε $f_n(z) \rightarrow f(z)$ ομοιομορφα στα συμπαγή υποσυνολα του \mathbb{D} .

Ορισμός

Η συναρτηση $k(z, w) := k_w(z) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$, $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ λεγεται πυρηνας του Szegő.

Εχουμε $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in H^2$.

Reproducing Kernel Hilbert Spaces

Εστω X μη κενό σύνολο (συνήθως $X \subseteq \mathbb{C}^d$). Ένας χώρος \mathcal{H} λέγεται **Reproducing Kernel Hilbert Space** στο X όταν

(α) αποτελείται από συναρτήσεις $X \rightarrow \mathbb{C}$ και είναι γραμμικός χώρος με πράξεις κατά σημείο,

(β) είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο ως προς το οποίο είναι χώρος Hilbert, και

(γ) για κάθε $z_0 \in X$ η απεικόνιση $f \mapsto f(z_0) : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ είναι συνεχής.

Επεται τότε (Θεώρημα Riesz) ότι για κάθε $z_0 \in X$ υπάρχει $k_{z_0} \in \mathcal{H}$ ώστε $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για κάθε $f \in \mathcal{H}$. Η συνάρτηση

$$k(z, w) := k_w(z) \quad (z, w) \in X \times X$$

λέγεται **πυρήνας αναπαραγωγής (reproducing kernel)** για τον \mathcal{H} .

Ο Χώρος \widetilde{H}^2 του Hardy στον κύκλο \mathbb{T}

Θυμίζουμε τον $L^2(\mathbb{T})$ με εσωτερικο γινόμενο

$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$ και ορθοκανονική βάση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$

όπου $f_n(e^{it}) = e^{int}$. Γραφουμε $\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Δηλαδή (a) $\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{mn}$ και (b) για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) f_k \right\|_{L^2} = 0 \quad \text{και} \quad \|f\|_{L^2}^2 \stackrel{(P)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2.$$

(P): Parseval

Ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι η $\|\cdot\|_{L^2}$ -κλειστή θηκη των *τριγ. πολυωνυμων*
 $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ορισμός

$$\widetilde{H}^2 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle \tilde{f}, f_n \rangle = 0 \quad \forall n < 0 \right\}.$$

Ο \widetilde{H}^2 είναι κλειστός γραμμ. υποχώρος του $L^2(\mathbb{T})$. Είναι η $\|\cdot\|_{L^2}$ -κλειστή θηκη των *αναλυτικων τριγ. πολυωνυμων* $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Ο Χωρος \widetilde{H}^2 και ο χωρος H^2

\widetilde{H}^2 : αποτελείται από (σχ. παντου ορισμενες) συναρτησεις $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ (mod. ισοτητα σχεδον παντου).

H^2 : αποτελείται απο συναρτησεις $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$.

Ειναι η $\|\cdot\|_{H^2}$ - κλειστη θηκη των *πολυωνυμων* $\text{span}\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ οπου $\zeta_k(z) = z^k, z \in \mathbb{D}$.

Ισομορφισμοι: ²

$$\begin{array}{ccccccc} f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n & \longleftrightarrow & (a_n) & \longleftrightarrow & \tilde{f} \sim \sum_{n \geq 0} a_n f_n & & \\ & & H^2 & \longleftrightarrow & \ell^2 & \longleftrightarrow & \widetilde{H}^2 \end{array}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$a_n = \langle \tilde{f}, f_n \rangle$$

Ο Χωρος \widetilde{H}^2 και ο χωρος H^2

Θεώρημα

Αν $f \in H^2$ με $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ορίζουμε για $r \in (0, 1)$

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}, \quad e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Τότε $f_r \in \widetilde{H}^2$ και υπάρχει το

$$\lim_{r \nearrow 1} f_r := \tilde{f} \quad \text{ως προς τη νορμα του } \widetilde{H}^2$$

οπov $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ με $\langle \tilde{f}, f_n \rangle = a_n \quad \forall n \geq 0$.

Ο Χωρος \tilde{H}^2 και ο χωρος H^2

Πόρισμα

Αν $f \in H^2$ υπαρχει (r_n) με $0 \leq r_n \nearrow 1$ ώστε

$$\lim_n f(r_n e^{it}) = \tilde{f}(e^{it})$$

σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

(Θα δειξουμε σε λιγο κατι πολυ ισχυροτερο, το Θεωρημα Fatou.)

Παρατήρηση

Αν μια f οριζεται και ειναι συνεχης στον κλειστο δισκο $\bar{\mathbb{D}}$ (πχ αν ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του $\bar{\mathbb{D}}$) τοτε $\tilde{f}(e^{it}) = f(e^{it})$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Ο Χωρος H^2 του Hardy: εναλλακτικός ορισμός

Θεώρημα

Εστω $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφη. Εχουμε

$$f \in H^2 \iff \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

Μαλιστα

$$f \in H^2 \Rightarrow \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \|f\|^2.$$

Πόρισμα

Εστω $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφη. Η συναρτηση

$$r \mapsto M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

ειναι αυξουσα στο $(0, 1)$. Η f ανηκει στον H^2 αν-ν η $r \mapsto M(r)$ ειναι φραγμαμενη, και τοτε $\|f\|^2 = \lim_{r \nearrow 1} M(r)$.

Ο Χώρος H^2 του Hardy V

Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Αν f είναι ολομορφή σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{\mathbb{D}}$, τότε για κάθε $z_0 \in \mathbb{D}$ έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Θεώρημα (Ολοκληρωτικός τύπος Poisson)

Αν $f \in H^2$ με αντιστοιχία $\tilde{f} \in \tilde{H}^2$ τότε για κάθε $re^{it} \in \mathbb{D}$ έχουμε

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(s-t) ds$$

όπου P_r ο πυρήνας Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}, \quad r \in [0,1), \theta \in [-\pi, \pi].$$

Αποδείξη στο [poissonn.pdf](#).

Το Θεώρημα του Fatou για τον H^2

Θεώρημα

Αν $f \in H^2$, υπάρχει σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ με μηδενικό μέτρο Lebesgue ώστε για κάθε $t \notin \Delta$,

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) = \tilde{f}(e^{it}).$$

Αποδειξη στο [fatou.pdf](#).

Σχολίο Το θεώρημα Fatou δίνει μια έκφραση για την απεικόνιση $H^2 \rightarrow \tilde{H}^2 : f \mapsto \tilde{f}$ (και αιτιολογεί την ονομασία «συνοριακή συνάρτηση» για την \tilde{f}).

Ο ολοκληρωτικός τύπος Poisson δίνει μια έκφραση για την αντιστροφή απεικόνιση $\tilde{H}^2 \rightarrow H^2 : \tilde{f} \mapsto f$.

Υπενθυμιση: Φραγμαμενοι τελεστες

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια **σε όλον το χώρο**.

Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν

(είναι φραγμένος στην $\text{ball}(E)$, δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε **για κάθε $x \in E$** να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη \iff συνεχής \iff ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή $A : E \rightarrow E$ σ' έναν χώρο Banach E είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{o } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο} \}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του \mathbb{C} και ότι

$$\sigma(A) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\| \}.$$

Πρόταση

Ένας φραγμένος τελεστής $T : E \rightarrow F$ μεταξύ χωρών Banach είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in E$ (λέμε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E »).

Ορισμός

Έστω $A \in \mathcal{B}(E)$ (E : Banach). Το **σημειακό φάσμα**:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το **προσεγγιστικά σημειακό φάσμα** $\sigma_a(A)$ είναι το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)** είναι το σύνολο

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \neq E\}.$$

Πρόταση

Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.

Υπενθυμιση: Ο συζυγής τελεστής.

Αν $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ (H_i : Hilbert), υπάρχει μοναδικός $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ ώστε

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^*y \rangle_1 \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Λήμμα

Έστω \mathcal{H} χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \quad \text{και} \quad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Λήμμα

Εστω \mathcal{H} χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε

(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

(ii) Αν $\exists A^{-1}$, τότε $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$.

(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ και $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

- Αν $\dim H < \infty$ τότε $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Αλλιώς, μπορεί $\sigma_p(A) = \emptyset$.
- Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι στο $\sigma_a(A)$ αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq m \|x\|$ για κάθε $x \in H$, αν-ν ο $A - \lambda I$ είναι 1-1 και έχει κλειστο σύνολο τιμών.

Παράδειγμα

Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $Se_n = e_{n+1}$, τότε

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Αν $p \in [1, \infty)$, με το σύμβολο $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ εννοούμε το σύνολο των μετρήσιμων *συναρτήσεων* $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \quad (\text{μέτρο Lebesgue}).$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dm(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ *m-σχεδόν για κάθε t*.

Υπενθύμιση: χώροι L^p (II)

Με $L^p(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\mathbb{T})$ ως προς την οποία ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι **χώρος Banach** (Θεώρημα Riesz-Fisher).

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty, \quad \text{άρα } C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Αν $g \in L^1(\mathbb{T})$ γράφω $\hat{g}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) e^{-ikt} dm(t)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ο **μετασχηματισμός Fourier** $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z}) : g \mapsto (\hat{g}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι γραμμική, 1-1 και συνεχής (όχι επί).³

Ο περιορισμός του, \mathcal{F} , στον $L^2(\mathbb{T})$ ικανοποιεί $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{\ell^2}$ και απεικονίζει την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ στην $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, άρα απεικονίζει τον $L^2(\mathbb{T})$ ισομετρικά και επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

³ ℓ^1 is separable, L^∞ is not.

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν (X, \mathcal{S}, μ) είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ αν (α) είναι \mathcal{S} -μετρήσιμη και (β) είναι **ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded)**, δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού, δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το **ουσιώδες φράγμα (essential supremum)** της $|f|$.

Δηλ. ορίζουμε

$$\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Αν $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$, τότε

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ ανν } f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X.$$

Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ -σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$, που γίνεται χώρος Banach με τις πράξεις κατά σημείο. Μαλιστα $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ (άλγεβρα Banach).

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Για καθε $f \in L^2(\mathbb{T})$, η συναρτηση ϕf είναι μετρησιμη και $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$. Συνεπως:

Πρόταση

Καθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ οριζει φραγμενο τελεστη

$$M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f.$$

Μαλιστα $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty = \text{esssup}|\phi|$.

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+) = \{x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

Για $x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^2$
ορίζω S και S' :

$$S(x(0), x(1), x(2), \dots) = (0, x(0), x(1), \dots)$$

$$S'(x(0), x(1), x(2), \dots) = (x(1), x(2), x(3), \dots)$$

$$\text{δηλαδή } (Sx)(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ x(n-1) & \text{αν } n > 0 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$(S'x)(n) = x(n+1) \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Προφανώς $S, S' : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, γραμμικοί και φραγμενοι.

Δειχνουμε οτι $\langle Sx, y \rangle = \langle x, S'y \rangle$ για καθε $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, δηλ. οτι ο συζυγής του S είναι ο S' .

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

Για $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$
ορίζω W και W' :

$$Wx = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$W'x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Wx)(n) = x(n-1)$ και $(W'x)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Προφανώς $W, W' : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $WW' = W'W = I$, δηλ. $W^{-1} = W'$.

Ο συζυγής του W είναι ο W' . Άρα $WW^* = W^*W = I$.

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} We_n &:= e_{n+1} && \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } W'e_n &:= e_{n-1} && \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle W'e_n, e_m \rangle = \langle e_n, We_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $W' = W^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &:= e_{n+1} && \text{(μετατόπιση δεξιά)} \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και } S'e_n &:= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} && \text{(μετατόπιση αριστερά)} \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Δείχνω $S' = S^*$.
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^* ;))

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

Συμπέρασμα

Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$: $We_n = e_{n+1}$ (μετατόπιση δεξιά)

$W^*e_n = e_{n-1}$ (μετατόπιση αριστερά) ($n \in \mathbb{Z}$)

Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$: $Se_n = e_{n+1}$ (μετατόπιση δεξιά) ($n \in \mathbb{Z}_+$)

$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases}$ (μετατόπιση αριστερά)

• Ο W είναι ισομετρία και επι.

Ισχύει $W(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ αλλά $W^*(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \not\subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

• Ο S είναι ισομετρία, όχι επι. Ο S^* είναι επι, όχι 1-1.

Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$$S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+):$$

Αφου $\|S^*\| = 1$, έχω $\sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

Δειχνω οτι

- $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$: για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, αν $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, έχω $x_\lambda \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ και $S^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$.

Επεται οτι

- $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$.

Ομως

- $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$:

Πάλι $\sigma(W^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Ομως $\sigma(W^*) = \sigma(W^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(W)\}$.

Συνεπώς αν $\lambda \in \sigma(W^*)$ πρέπει $|\lambda| \leq 1$ και $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$ αφού $\sigma(W) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

Άρα $|\lambda| = 1$. Δηλαδή $\sigma(W^*) \subseteq \mathbb{T}$.

Άσκηση: $\sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}$.

Άσκηση: $\sigma_p(W) = \emptyset$.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο κλειστός υπόχωρος \overline{E} είναι και αυτός A -αναλλοίωτος. Όταν και ο E και ο E^\perp είναι A -αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος E **ανάγει (reduces)** τον A .

Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A -αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (όπου $P = P_E$, η **ορθη προβολή στον E** (4)).
Ο E **ανάγει τον A** αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, **ισοδύναμα** αν και μόνον αν $AP = PA$.

Ενημερωτικά, το ακολουθιο είναι ανοικτο:

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert H (ισοδύναμα, στον ℓ^2) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;

Αναλλοίωτοι υπόχωροι του shift S

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θετούμε

$$\begin{aligned} E_n &:= \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) : x = (0, \dots, 0, x(n), \dots)\} = \overline{\text{span}}\{e_k : k \geq n\} \\ &= \{e_k : 0 \leq k < n\}^\perp = \{e_0, S(e_0), \dots, S^{n-1}(e_0)\}^\perp. \end{aligned}$$

Ο E_n είναι (γνησιος) S -αναλλοιωτος υποχωρος.

Επισης για κάθε $\lambda \in \mathbb{D}$ ο υποχωρος

$$E(\lambda) := \{x_\lambda\}^\perp \quad \text{οπου } x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

είναι S -αναλλοιωτος. **Άσκηση:** Το ίδιο και ο

$$E_n(\lambda) := \{x_\lambda, S(x_\lambda), \dots, S^{n-1}(x_\lambda)\}^\perp.$$

The (unilateral) shift S on ℓ^2 and T_1 on H^2

$$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \quad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$
$$T_1 : H^2 \rightarrow H^2 : (T_1 f)(z) := zf(z), \quad f \in H^2$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ H^2 & \xrightarrow{T_1} & H^2 \end{array} \quad : \quad T_1 = VSV^{-1}$$

οπου $V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2 : e_n \mapsto \zeta_n$ (εδω $\zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}$).

T_1 -Αναλλοιωτοι υποχωροι

Αν $E_m = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq m\}$,

ο $V(E_m)$ είναι T_1 -αναλλοιωτος και

$$V(E_m) = \{f \in H^2 : f^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k < m\} = \{\zeta_m f : f \in H^2\}.$$

Επισης αν $\lambda \in \mathbb{D}$ και $E(\bar{\lambda}) = \{x_{\bar{\lambda}}\}^\perp$, ο υποχωρος

$$V(E(\bar{\lambda})) = \{k_\lambda\}^\perp = \{f \in H^2 : f(\lambda) = 0\}$$

είναι T_1 -αναλλοιωτος.

Άσκησης Για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, τα διανυσματα $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \dots, \}$ είναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμικη τους θηκη ισουται με $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

The (bilateral) shift W on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and M_1 on $L^2(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \\ f_n &\mapsto e_n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{W} & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathcal{F} \uparrow & & \uparrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{M_1} & L^2(\mathbb{T}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \mathcal{F}| \uparrow & & \uparrow \mathcal{F}| \\ \tilde{H}^2 & \xrightarrow{T_1} & \tilde{H}^2 \end{array}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}), \qquad T_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

Αναγοντες (reducing) υποχωροι των shifts

Πρόταση

Οι μονοι κλειστοι υποχωροι του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ που αναγουν τον S ειναι ο $\{0\}$ και ο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος E του $\ell^2(\mathbb{Z})$ αναγει τον W αν-ν υπαρχει μετρησιμο $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ ωστε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(E) &= \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{it}) = 0 \text{ σχεδον για καθε } e^{it} \notin \Omega\} \\ &= \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}.\end{aligned}$$

Αλλιως: Ενας κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}$$

οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.

Η αποδειξη της Προτασης για τον W θα χρειασθει προετοιμασια.

Ο μεταθετης (commutant) του W

Να βρούμε όλους τους τελεστες στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ που μετατιθενται με τον W .
Ισοδυναμα, να βρούμε όλους τους τελεστες στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον $M_1 = \mathcal{F}^{-1}W\mathcal{F}$.

Καθε πολλαπλασιαστικος τελεστης M_ϕ με $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ μετατιθεται με τον (πολλαπλασιαστικο τελεστη) M_1 . Δεν υπαρχουν αλλοι:

Θεώρημα

Το συνολο των τελεστων στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον M_1 ειναι το

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του M_1

Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T})$$

οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.

Θεώρημα

Ενας κλειστος υποχωρος E του $L^2(\mathbb{T})$ ειναι M_1 -αναλλοιωτος αλλα δεν αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E = \{\phi g : g \in \tilde{H}^2\} = \phi \tilde{H}^2$$

οπου $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $|\phi(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Καθοριζεται μοναδικα η ϕ απο τον E ;

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του M_1 και του S

Πρόταση («Μοναδικότητα»)

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $|\phi(e^{it})| = 1 = |\psi(e^{it})|$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$,
τοτε

$$\phi \tilde{H}^2 = \psi \tilde{H}^2 \iff \exists c \in \mathbb{T} : \phi = c\psi.$$

Ορισμός

Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Πρόταση

Εστω $\phi \in H^2$. Αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τοτε η ϕ ειναι εσωτερικη.

Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος T_1 -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του \tilde{H}^2 ειναι της μορφης $E = \tilde{\phi} \tilde{H}^2$ οπου ϕ εσωτερικη.

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του S

Ορισμός

Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος T_1 -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του \tilde{H}^2 ειναι της μορφης $E = \tilde{\phi}\tilde{H}^2$ οπου ϕ εσωτερικη.

Αν $\phi H^2 = \psi H^2$ με ψ εσωτερικη, τοτε υπαρχει $c \in \mathbb{T}$ ωστε $\psi = c\phi$.

Συνηθως λεμε «καθε μη μηδενικος S -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του H^2 ειναι της μορφης ϕH^2 οπου ϕ εσωτερικη». :

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του S

$$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \quad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

$$T_1 : H^2 \rightarrow H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \quad f \in H^2.$$

$$V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H^2 : e_n \mapsto \zeta_n \quad (\text{\textepsilon}\delta\omega \quad \zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}).$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ H^2 & \xrightarrow{T_1} & H^2 \end{array}$$

Αν $\{0\} \neq E \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ κλειστος υποχωρος,

$$S(E) \subseteq E \iff T_1(V(E)) \subseteq V(E) \iff V(E) = \phi H^2, \quad \phi \text{ εσωτ.}$$

Εσωτερικές και εξωτερικές συναρτήσεις

Πρόταση

Καθε T_1 -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του H^2 είναι T_1 -κυκλικος, δηλ. υπαρχει $\phi \in E$ ωστε

$$E = \overline{\text{span}}\{T_1^n(\phi) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Ορισμός

Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται **εσωτερικη (inner function)** αν

$$|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1 \quad \text{σχεδον για καθε } e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Μια $F \in H^2$ λεγεται **εξωτερικη (outer function)** αν

$$\overline{\text{span}}\{T_1^n(F) : n \in \mathbb{Z}_+\} = H^2.$$

Πρόταση

Μια εξωτερικη συναρτηση δεν εχει καμια ριζα στον \mathbb{D} .

Εσωτερικές και εξωτερικές συναρτησεις

Υπενθ: Οι ρίζες μιας $\neq 0$ ολομορφης συναρτησης στον \mathbb{D} αποτελουν «μικρο» συνολο: δεν εχουν σημεια συσσωρευσης στο \mathbb{D} .

Θεώρημα (F. και M. Riesz)

Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, το συνολο $\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$ εχει μετρο (Lebesgue) μηδεν.

Θεώρημα (Inner-Outer factorization)

Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, υπαρχει εσωτερικη φ και εξωτερικη F ωστε $f = \varphi F$.

Αν επισης $f = \varphi' F'$ με φ' εσωτερικη και F' εξωτερικη τοτε $\varphi' = c\varphi$ οπου $c \in \mathbb{T}$ (και αρα $F = cF'$).

• Επομενωσ οι ριζες μιας μη μηδενικης $f \in H^2$ ειναι ακριβωσ οι ριζες του εσωτερικου της παραγοντα.

Εσωτερικές συναρτησεις: Γινομενα Blaschke

Υπενθ. Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, ο υποχωρος

$$E_{z_0} := \{f \in H^2 : f(z_0) = 0\} = \{k_{z_0}\}^\perp$$

του H^2 ειναι T_1 -αναλλοιωστος .

Πρόταση

Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ η συναρτηση

$$\psi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$$

ειναι εσωτερικη και $E_{z_0} = \psi H^2$.

Πρόταση

Αν $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ η συναρτηση

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$$

ειναι εσωτερικη και

$$\psi H^2 = \{f \in H^2 : f(z_1) = f(z_2) = \dots = f(z_n) = 0\}.$$

Πόρισμα

Εστω ϕ εσωτερική συναρτηση που έχει ριζες στα $\{0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ όπου το 0 είναι ρίζα με πολλαπλότητα $s \geq 0$. Αν

$$\psi(z) := z^s \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$$

τότε

$$\phi(z) = \psi(z)S(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου η S είναι εσωτερική συναρτηση (όπως και η ψ).

Θεώρημα

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτο και συνεκτικο (:τοπος (region)) και $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφη. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

(a) $f = 0$.

(b) Υπαρχει $a \in G$ ωστε $f^{(n)}(a) = 0$ για καθε $n \in \mathbb{Z}_+$.

(c) Το συνολο $Z(f) = \{a \in G : f(a) = 0\}$ εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο G .

Ενα συνολο $G \subseteq \mathbb{C}$ λεγεται **συνεκτικο** αν δεν περιεχει μη τετριμενα (σχετικα) ανοικτο-κλειστα (clopen) υποσυνολα. Αν G ανοικτο, ειναι συνεκτικο αν-ν καθε δυο σημεια του συνδεονται με συνεχη καμπυλη που δεν βγαινει απ το G . Παραδειγμα, ο δισκος \mathbb{D} . Μη παραδειγμα: η ενωση δυο ξενων ανοικτων δισκων, πχ $\mathbb{D} \cup B(3, 1)$.

Πόρισμα (Αρχη της ταυτοτητας)

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτο και συνεκτικο και $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφες. Εστω $S := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$. Αν το S εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο G , τοτε $f = g$.

Παρατήρηση (Τοπος: αναγκαιο)

Εστω $G = D_1 \cup D_2 \subseteq \mathbb{C}$ η ένωση δυο ξενων ανοικτων δισκων και

$f : G \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} 1, & z \in D_1 \\ 0, & z \in D_2 \end{cases}$ η χαρακτηριστικη του D_1 . Η f είναι

ολομορφη, μη σταθερη, παιρνει πραγματικες μονο τιμες, εχει υπεραριθμησιμο συνολο ριζων.

Πόρισμα

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτο και συνεκτικο και $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφη και μη μηδενικη. Τότε οι ριζες της είναι μεμονωμενες: δηλ. γυρω απο καθε ριζα a υπαρχει μια περιοχη $B(a, r)$ ωστε η f να μην μηδενιζεται πουθενα στο $B(a, r) \setminus \{a\}$.

Επισης οι ριζες εχουν πεπερασμενη πολλαπλοτητα: υπαρχει $m \in \mathbb{N}$ ωστε $f(z) = (z - a)^m g(z)$ οπου g ολομορφη στο G και $g(a) \neq 0$.

Θεώρημα (Αρχη μεγιστου)

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτο και συνεκτικο και $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφη. Αν υπαρχει $a \in G$ ωστε $|f(a)| \geq |f(z)|$ για καθε $z \in G$, τοτε η f ειναι σταθερη.

Πόρισμα

Αν $\phi \in H^\infty$ ειναι εσωτερικη συναρτηση, μη σταθερη, τοτε $|\phi(z)| < 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$.

Απόδειξη.

Απο τον τυπο του Poisson (19) εχουμε $|\phi(z)| \leq 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ (γιατι $\|P_r\|_1 = 1$). Αν υπηρχε z στον \mathbb{D} ωστε $|\phi(z)| = 1$ τοτε η ϕ θα ηταν σταθερη απο την αρχη του μεγιστου. □

Θα χρειασθει το

Θεώρημα (Hurwitz)

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτο και συνεκτικο και $g_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφες ($n \in \mathbb{N}$). Υποθετουμε οτι $g_n(z) \rightarrow g(z)$ ομοιομορφα ως προς z στα συμπαγη υποσυνολα του G . Αν καθε g_n δεν εχει καμμια ριζα στο G τοτε ή η g δεν εχει καμμια ριζα στο G , ή αλλιως ειναι η μηδενικη συναρτηση.

Πρόταση

Εστω ϕ εσωτερική συναρτηση με $\phi(0) \neq 0$. Υποθετουμε οτι η ϕ μηδενίζεται στα σημεια $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε

$$|\phi(0)| \leq \prod_{i=1}^n |z_i| \text{ για καθε } n \in \mathbb{N}.$$

Πότε μια απειρη ακολουθια (z_n) σημειων του δισκου μπορει να αποτελειται απο ριζες μιας $f \in H^2$; Αναγκαια συνθηκη (αρχη μεγιστου) ειναι η $\lim_n |z|_n = 1$. Αρκει;

Παράδειγμα

Δεν υπαρχει $f \in H^2$ με συνολο ριζων $Z(f) = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός (Συγκλιση απειρογινομενων)

- Εστω $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν τα μερικα γινόμενα $p_n := \prod_{i=1}^n w_i$ συγκλινουν σε ενα $p \neq 0$ λεμε οτι το $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$ **συγκλινει (στο p)**.
- Εστω $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C}$. Αν καποια w_k μηδενιζονται, και υπαρχει N ωστε $w_n \neq 0$ για καθε $n \geq N$ και το $\prod_{i=N}^{\infty} w_i$ συγκλινει (σε καποιο $p \neq 0$), τοτε λεμε οτι το $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$ **συγκλινει στο 0**.

Πρόταση

Εστω $f \in H^2$ μη μηδενικη συναρτηση. Αν $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ και η f μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, τοτε το $\prod_{i=1}^{\infty} |z_i|$ συγκλινει (σε ενα $p \neq 0$).

Παρατήρηση

Αν $r_k \in (0, 1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το απειρογινόμενο $\prod_{i=1}^{\infty} r_i$ συγκλίνει (σε $p > 0$) αν-ν η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - r_i)$ συγκλίνει.

Πόρισμα

Εστω $f \in H^2$ μη μηδενική συναρτηση. Αν $z_n \in \mathbb{D}$ και η f μηδενίζεται (τουλάχιστον) στα σημεία $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$.

Θα δούμε ότι αντιστρόφα, αν $\{z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ με $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$ τότε υπάρχει $f \in H^2$ (μαάλιστα, εσωτερική) που έχει ακριβώς αυτές τις ρίζες.

Θεώρημα

Εστω (z_k) ακολουθία στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ με $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$. Τότε υπάρχει μια εσωτερική συναρτηση B_0 που έχει σύνολο ριζών $Z(B_0) = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $z \in \mathbb{D}$, έχουμε

$$B_0(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}.$$

όπου το άπειρογινόμενο συγκλίνει ομοιομορφα στα συμπαγή του \mathbb{D} .

Σχολιο. Η συγκλιση του άπειρογινόμενου σημαίνει ότι, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του \mathbb{D} , μόνον πεπερασμένο πλήθος όρων του άπειρογινόμενου έχει ρίζες στο K και ότι το άπειρογινόμενο που αποτελείται από τους υπολοίπους όρους συγκλίνει ομοιομορφα στο συμπαγές K σε μια ολομορφη συναρτηση που δεν έχει καμμία ρίζα στο K .

Ορισμός

Εστω $\{z_k\} \subseteq \mathbb{D} \setminus \{0\}$ με $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|) < \infty$ και $s \in \mathbb{Z}_+$. Το γινόμενο Blaschke με ριζες στα $\{z_k\}$ και ριζα πολλαπλοτητας s στο $z = 0$ είναι η συναρτηση

$$B(z) := z^s \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}.$$

Παρατήρηση

- Το απειρογινόμενο συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{D}$.
- Η B είναι εσωτερική συναρτηση.
- Οι ριζες της B είναι ακριβώς τα σημεία $\{z_k\}$ (με τις πολλαπλοτητες που εμφανίζονται) καθώς και το 0 με πολλαπλοτητα s .

Αποδειξεις στο [blaschke.pdf](#)

Σημειωση: Αν $Z(B)$ το σύνολο των ριζών της B και s_w η πολλαπλότητα της ρίζας w

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(B) \setminus \{0\}} \left(\frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right)^{s_w} .$$

Παράδειγμα

Υπάρχει $f \in H^2$ (μαλιστα, εσωτερικη) που δεν επεκτεινεται σε κανενα σημειο της περιφερειας \mathbb{T} σε ολομορφη συναρτηση.

Παρατηρηση [Δ.Ε.] Μαλιστα, δεν επεκτεινεται καν σε συνεχη συναρτηση.

Singular inner functions (δείτε και το [singinner24.pdf](#))

Ορισμός

Μια εσωτερική συνάρτηση $\varphi \in H^\infty$ λέγεται **ιδιόζουσα εσωτερική συνάρτηση (singular inner function)** αν δεν είναι σταθερή και δεν έχει ρίζες στον \mathbb{D} .

Παράδειγμα

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Παράδειγμα

$$\varphi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{z+e^{i\theta_k}}{z-e^{i\theta_k}} a_k\right), \quad z \in \mathbb{D} \text{ όπου } a_k > 0 \text{ και } \theta_k \in [0, 2\pi].$$

Θεώρημα

Μια $S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι *ιδιαζούσα εσωτερική συναρτησιμότητα* αν-ν είναι της μορφής

$$S(z) = c \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου $c \in \mathbb{T}$ και μ είναι κανονικό θετικό μη μηδενικό μέτρο Borel στον \mathbb{T} που είναι *καθeto ή ιδιαζόν ως προς το μέτρο Lebesgue*.

(Ένα θετικό μέτρο Borel στον \mathbb{T} λέγεται *καθeto ή ιδιαζόν* ως προς το μέτρο Lebesgue m αν είναι συγκεντρωμένο σε ένα m -μηδενικό σύνολο $A \subseteq \mathbb{T}$, αν δηλαδή $\mu(A^c) = 0$ και $m(A) = 0$.)

Singular inner functions

Θα χρειασθει το ακολουθο Θεωρημα αναπαραστασης:

Θεώρημα (Herglotz)

Εστω $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ολομορφη ωστε $\operatorname{Re} h(z) > 0$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Τότε υπαρχει κανονικο θετικο μετρο Borel μ στον \mathbb{T} ωστε

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) + i \operatorname{Im}(h(0)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Λήμμα

Εστω μ κανονικο θετικο μετρο Borel στον \mathbb{T} . Οριζουμε

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Τότε η F είναι ολομορφη στο \mathbb{D} .

Αποδειξεις στο [singinner24.pdf](#)

Πρόταση

Καθε εσωτερική συνάρτηση $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ παραγοντοποιείται ως $\phi = BS$, όπου B είναι το γινόμενο Blaschke

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(\phi) \setminus \{0\}} \left(\frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right)^{s_w}, \quad z \in \mathbb{D}$$

που ορίζεται από το σύνολο $Z(\phi)$ των ριζών της ϕ (με την πολλαπλότητα s_w της καθεμιάς) και S είναι ιδιαίτερη εσωτερική συνάρτηση της μορφής

$$S(z) = c \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

όπου $c \in \mathbb{T}$ και μ είναι κανονικό θετικό μέτρο Borel στον \mathbb{T} που είναι κάθετο (ή ιδιαίτερο) ως προς το μέτρο Lebesgue.

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Υπενθυμιση (Θ. Beurling): $\text{Lat}(S) = \{\phi H^2 : \phi \text{ εσωτερικη}\} \cup \{0\}$.

Παράδειγμα

Για $a \in [0, 1]$ θετουμε $\phi_a(z) := \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. Εχουμε

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \Rightarrow \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = H^2.$$

Δηλαδή η απεικονιση $[0, 1] \rightarrow \text{Lat}(S) : a \mapsto \phi_a$ (ειναι 1-1 και) διατηρει τη διαταξη.

Θα δουμε σε λιγο οτι η συνεπαγωγη \Rightarrow ειναι στην πραγματικοτητα ισοδυναμια \Leftrightarrow .

Δηλαδή ο συνδεσμος $\text{Lat}(S)$ εχει υποσυνδεσμους ισομορφους ως προς τη διαταξη με το $[0, 1]$ (με τη φυσιολογικη του διαταξη).

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Πρόταση

Θεωρούμε δυο εσωτερικές συναρτησεις ϕ_1 και ϕ_2 . Τότε έχουμε $\phi_1 H^2 \subseteq \phi_2 H^2$ αν-ν η ϕ_1/ϕ_2 είναι εσωτερική συναρτηση.

Αυτο συμβαίνει αν-ν

- κάθε ρίζα z της ϕ_2 είναι ρίζα της ϕ_1 με την ίδια ή μεγαλύτερη πολλαπλοτητα ($\text{mult}_1(z) \geq \text{mult}_2(z)$) και
- έχουμε $\mu_2(E) \leq \mu_1(E)$ για κάθε Borel $E \subseteq \mathbb{T}$, όπου μ_i είναι το ιδιαίζον μετρο που αντιστοιχει στην ϕ_i .

Λήμμα

Αν μ και ν είναι θετικά πεπερασμένα μετρα Borel στο $[0, 2\pi]$ και

$$\exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right) = \exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t) \right)$$

για κάθε $z \in \mathbb{D}$, τότε $\mu = \nu$.

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Πρόταση

Εστω ϕ εσωτερικη συναρτηση. Ο υποχωρος ϕH^2 του H^2 εχει πεπερασμενη συνδιασταση (δηλαδη $\dim(\phi H^2)^\perp = m < \infty$) αν-ν η ϕ ειναι γινομενο Blaschke με πεπερασμενο πληθος (= m) παραγοντων (επι μια σταθερα).

Παρατηρηση

Για $a \in [0, 1]$ θετουμε $\phi_a := BS_{\mu_a}$ οπου B γινομενο Blaschke και S_{μ_a} ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση με μετρο $\mu_a := (1 - a)\mu$ οπου μ θετικο μετρο. Εχουμε

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \iff \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = B H^2.$$

Αν $\mu \neq 0$, οι υποχωροι $\phi_a H^2$ ειναι διαφορετικοι ανα δυο: σχηματιζουν απειρη αλυσιδα (ισομορφη με το $[0, 1]$) μεταξυ των $\phi_0 H^2$ και $\phi_1 H^2$. Επισης, αν το B ειναι απειρογινομενο, οι υποχωροι $B H^2 \subseteq B_1 H^2 \subseteq \dots$ του H^2 οπου $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ πρωτοβαθμιος παραγοντας Blaschke, ειναι απειρη αλυσιδα (ισομορφη με το $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) μεταξυ των $\phi_1 H^2$ και H^2 .

Ορισμός

Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι εσωτερικές συναρτήσεις, λέμε ότι **η ϕ_2 διαιρεί την ϕ_1** αν υπάρχει ϕ_3 εσωτερική ώστε $\phi_1 = \phi_2\phi_3$.

Εστω $\{\phi_i, i \in I\}$ οικογένεια εσωτερικών συναρτήσεων. Λέμε ότι η εσωτερική συνάρτηση ϕ_M είναι ο **μεγιστος κοινος διαιρετης** της $\{\phi_i, i \in I\}$ αν (α) η ϕ_M διαιρεί κάθε $\phi_i, i \in I$ και (β) κάθε άλλη εσωτερική συνάρτηση ϕ που διαιρεί την $\{\phi_i, i \in I\}$, διαιρεί και την ϕ_M . Λέμε ότι η εσωτερική συνάρτηση ϕ_E είναι το **ελαχιστο κοινό πολλαπλασιο** της $\{\phi_i, i \in I\}$ αν (α) κάθε $\phi_i, i \in I$ διαιρεί την ϕ_E και (β) αν μια εσωτερική συνάρτηση ϕ διαιρείται από όλες τις ϕ_i τότε διαιρείται και από την ϕ_E .

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Πρόταση

Καθε οικογενεια $\{\phi_i, i \in I\}$ εσωτερικων συναρτησεων εχει μεγαστο κοινο διαιρητη.

Καθε *πεπερασμενη* οικογενεια $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ εσωτερικων συναρτησεων εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο.

Παράδειγμα

Οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων που *δεν* εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο;

Πρόταση

Αν E είναι *μη μηδενικος* κλειστος S -αναλλοιωτος υποχωρος του H^2 , τοτε $E = \phi H^2$ οπου ϕ είναι ο μεγαστος κοινος διαιρητης των εσωτερικων μερων ολων των $f \in E$.

Υπενθυμιση Αν $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθοκανονικη βαση χωρου Hilbert H , σε καθε $A \in \mathcal{B}(H)$ αντιστοιχει πινακας $[a_{nm}]$ οπου $[a_{nm}] = \langle Ae_m, e_n \rangle$.

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, ο πινακας του τελεστη M_ϕ ως προς τη συνηθισμενη ο/κ βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ του $L^2(\mathbb{T})$ ειναι

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [\hat{\phi}(n-m)].$$

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ έχει $[a_{nm}] = [u(m-n)]$ στη συνηθισμενη ο/κ βαση, τότε υπαρχει $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ωστε $A = M_\phi$.

Ορισμός

Ενας πινακας (ειτε $n \times n$ ειτε $\infty \times \infty$) λεγεται **πινακας Toeplitz** αν εχει «σταθερες διαγωνιους», δηλ. αν $m-n = j-i \Rightarrow a_{nm} = a_{ij}$ (ισοδυναμα, $a_{n,m} = a_{n+1,m+1} \forall n, m$).

Πινακες Toeplitz

Υπενθυμιση: Το συνολο τιμων μιας $\phi \in C(\mathbb{T})$:

$$\text{ran}(\phi) := \phi(\mathbb{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| = 0\} \neq \emptyset\}.$$

Αν $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f$, τότε

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \text{ran}(\phi).$$

Γενικευση:

Ορισμός

Το ουσιωδες συνολο τιμων (essential range) μιας $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\text{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \forall \varepsilon > 0\}.$$

Ειναι συμπαγες υποσυνολο του \mathbb{C} .

Πρόταση

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \text{essran}(\phi).$$

Ορισμός

Η προβολή του Riesz $P \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ ορίζεται από τον τύπο

$$P \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) f_k \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \hat{f}(n) f_n, \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

ισοδυναμα

$$P(f_n) = \begin{cases} f_n, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

είναι δηλαδή η ορθή προβολή του $L^2(\mathbb{T})$ επί του \tilde{H}^2 .

Ορισμός

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ορίζουμε τον **τελεστή Toeplitz** T_ϕ

$$T_\phi := PM_\phi|_{\tilde{H}^2} : \tilde{H}^2 \rightarrow \tilde{H}^2 : f \mapsto M_\phi f \mapsto PM_\phi f.$$

Η $\{f_n : n \geq 0\}$ είναι ορθοκανονική βάση του \tilde{H}^2 και η $\{f_n : n < 0\}$ είναι ο/κ βάση του $(\tilde{H}^2)^\perp$. Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Ως προς τη διασπαση $L^2(\mathbb{T}) = (\tilde{H}^2)^\perp \oplus \tilde{H}^2$ ο πίνακας του τελεστή M_ϕ γίνεται

$$M_\phi \simeq \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \ddots & \vdots \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \end{array} \right] \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] \end{array} \right)$$

Αρα

$$T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ορισμός

Ενας τελεστής Toeplitz T_ϕ λεγεται **αναλυτικός τελεστής Toeplitz** αν $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ (οπότε $T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} : \widetilde{H}^2 \rightarrow \widetilde{H}^2 : f \mapsto \phi f$).

$$T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & 0 & 0 & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & 0 & \dots \\ \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Υπενθυμιση

Θεώρημα

Το συνολο των τελεστων στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον M_1 είναι το

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

Πρόταση

Ο μεταθετης του unilateral shift T_1 στον \tilde{H}^2 είναι το συνολο των αναλυτικων τελεστων Toeplitz: Αν $A \in \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$, τότε

$$AT_1 = T_1A \iff A = T_\phi \text{ για καποιο } \phi \in \tilde{H}^\infty.$$

Reminder: The (bilateral) shift W on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and M_1 on $L^2(\mathbb{T})$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$f_n \mapsto e_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathcal{F}_r := \mathcal{F}|_{\tilde{H}^2}$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{W} & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathcal{F} \uparrow & & \uparrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{M_1} & L^2(\mathbb{T}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{S} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \mathcal{F}_r \uparrow & & \uparrow \mathcal{F}_r \\ \tilde{H}^2 & \xrightarrow{\tilde{T}_1} & \tilde{H}^2 \end{array}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}),$$

$$\tilde{T}_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

Multiplication operators and Toeplitz operators

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) : g \mapsto \phi g$.

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\hat{M}_\phi} & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \uparrow \mathcal{F} & & \uparrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{M_\phi} & L^2(\mathbb{T}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \xrightarrow{\hat{T}_\phi} & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \uparrow \mathcal{F}_r & & \uparrow \mathcal{F}_r \\ \tilde{H}^2 & \xrightarrow{\tilde{T}_\phi} & \tilde{H}^2 \end{array}$$

$$\hat{M}_\phi := \mathcal{F} M_\phi \mathcal{F}^*, \quad \tilde{T}_\phi = P M_\phi|_{\tilde{H}^2}, \quad \sim \hat{T}_\phi := \mathcal{F}_r \tilde{T}_\phi \mathcal{F}_r^*$$

$$\{W\}' = \{\hat{M}_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\} \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$$

$$\{\tilde{T}_1\}' = \{\tilde{T}_\phi : \phi \in \tilde{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$$

$$\sim \{S\}' = \{\hat{T}_\phi : \phi \in \tilde{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+)).$$

Πρόταση

Ένας φραγμένος τελεστής $A \in \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$ είναι τελεστής Toeplitz αν-ν έχει πίνακα Toeplitz ως προς την ο/κ βάση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Συνεπεία για $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$:

Πόρισμα

Ένας φραγμένος τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι τελεστής Toeplitz, δηλαδή υπάρχει $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ώστε $\langle Te_m, e_n \rangle = \hat{\phi}(n - m)$, αν-ν

$$S^*TS = T.$$

Παρατήρηση Η απεικόνιση $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})) : \phi \mapsto M_\phi$

- Είναι γραμμική: $M_{\phi+\lambda\psi} = M_\phi + \lambda M_\psi$
- Διατηρεί τη μονάδα: $M_1 = I$
- Διατηρεί την ενελίξη: $M_{\bar{\phi}} = M_\phi^*$
- Είναι συστολή (μαάλιστα ισομετρία): $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- Διατηρεί το γινόμενο: $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$

Πρόταση

Η απεικόνιση $L^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{H}^2) : \phi \mapsto T_\phi = PM_\phi|_{\tilde{H}^2}$

- Είναι γραμμική: $T_{\phi+\lambda\psi} = T_\phi + \lambda T_\psi$
- Διατηρεί τη μονάδα: $T_1 = I$
- Διατηρεί την ενελίξη: $T_{\bar{\phi}} = T_\phi^*$
- Είναι συστολή: $\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ και 1-1 (αργότερα θα δειχθεί ισομετρία)
- Δεν διατηρεί το γινόμενο

(πχ. $f_{-1}f_1 = f_1f_{-1}$ ενώ $T_{f_{-1}}T_{f_1} \neq T_{f_1}T_{f_{-1}}$).

Πρόταση

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, ο τελεστης $T_\psi T_\phi$ είναι Toeplitz αν-ν είτε $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ είτε $\bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$. Τότε έχουμε $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$.

Θα χρειασθουν

Συμβολισμος Αν H Hilbert και $f, g \in H$ ο τελεστης $fg^* \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται ως εξής:

$$fg^* : h \mapsto \langle h, g \rangle f, \quad f \in H.$$

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ τότε $A(fg^*)B = (Af)(B^*g)^*$.

Λήμμα

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$T_1^*(T_\psi T_\phi)T_1 - (T_\psi T_\phi) = fg^*$$

οπου $f = P(f_{-1}\psi)$ και $g = P(f_{-1}\bar{\phi})$.

Τελεστές Toeplitz

Πόρισμα

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, έχουμε $T_\psi T_\phi = 0$ αν-ν είτε $T_\psi = 0$ είτε $T_\phi = 0$.

Ποτε μετατιθενται; Ελεγχουμε οτι αν και οι δυο $\phi, \psi \in \widetilde{H}^\infty$, ή και οι δυο $\bar{\phi}, \bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$, ή $\exists a, b \in \mathbb{C}$ ωστε $a\psi + b\phi = f_0 = 1$, τότε μετατιθενται.

Πρόταση

Εστω $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Εχουμε $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$ αν-ν ισχυει (τουλαχιστο) ενα απο τα ακολουθα

- οι ϕ και ψ ανηκουν στον \widetilde{H}^∞ ,
- οι $\bar{\phi}$ και $\bar{\psi}$ ανηκουν στον \widetilde{H}^∞ ,
- υπαρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| + |b| \neq 0$ ωστε $a\psi + b\phi = c1$ οπου $c \in \mathbb{C}$.

Πόρισμα

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και εχουμε $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$, τότε είτε ο $T_\psi T_\phi$ ειναι Toeplitz ή μια απ τις ϕ, ψ ειναι γραμμ. συνδυασμος της αλλης και της 1.

Παρατήρηση

Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ είναι αυτοσυζυγής αν-ν η ϕ παίρνει σ.π. πραγματικές τιμές (γιατί $T_\phi^ = T_{\bar{\phi}}$).*

Πόρισμα

Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ είναι φυσιολογικός αν-ν υπάρχουν $c, d \in \mathbb{C}$ και $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ πραγματική ώστε $\phi = c\psi + d$ σ.π.

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Ορισμός (Υπενθυμιση)

Το ουσιωδες συνολο τιμων (essential range) μιας $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\text{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \forall \varepsilon > 0\}.$$

Δηλ. $\lambda \notin \text{essran}(\phi) \iff \exists \varepsilon > 0 : m(B(\lambda, \varepsilon) \cap \text{ran}(\phi)) = 0.$

Πρόταση (Υπενθυμιση)

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \text{essran}(\phi).$$

Θεώρημα

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, τότε $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$. Μαλιστα

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) \subseteq \sigma_a(T_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi).$$

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Παρατήρηση

Ο εγκλεισμος $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$ είναι συνηθως γνησιος. Για παραδειγμα, αν $\phi = f_1$ τότε $\sigma(M_\phi) = \sigma(W) = \mathbb{T}$ ενώ $\sigma(T_\phi) = \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ (οπως εχουμε δειξει).

Πόρισμα

Για καθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\|\phi\|_\infty = \|M_\phi\| = \|T_\phi\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_\phi)\}.$$

Ειδικότερα η $\phi \mapsto T_\phi$ είναι *ισομετρια*.

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Πρόταση

Αν $\phi \in H^\infty$ τότε

$$\sigma(T_\phi) = \overline{\phi(\mathbb{D})}.$$

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Θεώρημα (Coburn alternative)

Αν $T_\phi \neq 0$ τότε ή ο T_ϕ είναι 1-1 ή ο T_ϕ^* είναι 1-1.

Πόρισμα

Αν $T_\phi \neq 0$ και δεν είναι 1-1 τότε έχει πυκνο συνολο τιμων.

Πόρισμα

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ μη σταθερα. Αν $\lambda \in \sigma_p(T_\phi)$ τότε $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T_\phi^*)$.
Ειδικότερα, αν η ϕ παιρνει σ.π. πραγματικες τιμες, τότε $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$.

Ο δεικτης στροφης

Υπενθυμιση Εστω $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ κλειστη κατα τμηματα συνεχως διαφορισιμη καμπυλη στο \mathbb{C} και $\lambda \notin [\gamma]$ οπου $[\gamma] := \{\gamma(t) : t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{C}$.

Ο δεικτης στροφης $\text{wind}(\gamma; \lambda) = n(\gamma; \lambda)$ οριζεται απο το επικαμπυλιο ολοκληρωμα

$$\text{wind}(\gamma; \lambda) = n(\gamma; \lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{[\gamma]} \frac{1}{z - \lambda} dz.$$

Θα δειξουμε οτι ο δεικτης στροφης επεκτεινεται σε ολες τις συνεχεις κλειστες καμπυλες $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Αν $f \in C(\mathbb{T})$, γραφουμε $n(f; \lambda)$ για τον δεικτη στροφης της $\gamma_f(t) := f(e^{2\pi i t})$, $t \in [0, 1]$.

Ο δεικτης αυτος οριζεται ως εξης: \rightsquigarrow

Ορισμός

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $0 \notin f(\mathbb{T})$, ορίζουμε

$$\text{wind}(f; 0) = n(f; 0) := g_f(1) - g_f(0)$$

οπου $g_f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνεχης συναρτηση που ικανοποιει $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i g_f(t)}$, $t \in [0, 1]$.

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{T})$, ορίζουμε

$$\text{wind}(f; \lambda) = n(f; \lambda) := n(f_\lambda; 0)$$

οπου $f_\lambda = f - \lambda 1$.

Τετοια g_f υπαρχει:

Πρόταση

Αν $\eta \gamma \in C([0, 1])$ δεν μηδενίζεται πουθενά (ισοδυναμα, αν είναι αντιστρεψιμο στοιχειο της αλγεβρας $C([0, 1])$), τότε υπαρχει (μη μοναδικη) $g \in C([0, 1])$ ωστε $\gamma = e^g$.

Πρόταση

Ο δεικτης στροφης εχει τις ακολουθες ιδιοτητες:
αν οι $f, h \in C(\mathbb{T})$ δεν μηδενιζονται πουθενα,

- 1 $n(fh; 0) = n(f; 0) + n(h; 0)$
- 2 $n(f; 0) = n \in \mathbb{Z} \iff \exists u \in C(\mathbb{T})$ ωστε $f = f_n e^u$ (οπου $f_n(e^{it}) = e^{int}$, $e^{it} \in \mathbb{T}$)
- 3 αν επιπλεον η f ειναι συνεχως παραγωγισιμη,

$$n(f; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} \frac{1}{z} dz$$

οπου $\gamma_f(t) = f(e^{2\pi i t})$, $t \in [0, 1]$.

Αποδειξεις στο [Ind24.pdf](#).

Το φασμα τελεστών Toeplitz

Θεώρημα

Αν $\phi \in C(\mathbb{T})$,

$$\sigma(T_\phi) = \text{ran}(\phi) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \text{ran}(\phi) \wedge n(\phi; \lambda) \neq 0\}.$$

Αποδειξη στο [specTf.pdf](#).