

Συμμετρίες και Αναπαραστάσεις I
Πρόχειρες Σημειώσεις

MM

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Δράση Ομάδας	1
1.1. Ορισμοί και Παραδείγματα	1
1.2. Τροχιές και σταθεροποιούσες υποομάδες	4
1.3. Κλάσεις συζυγίας της συμμετρικής ομάδας	9
Ασκήσεις Κεφαλαίου 1	11
Κεφάλαιο 2. Αναπαραστάσεις Ομάδων	13
2.1. Ορισμοί και Παραδείγματα	13
2.2. FG -πρότυπα	16
2.3. FG -πρότυπα και αλλαγή βάσης	18
2.4. Ανάγωγα FG -πρότυπα	19
Ασκήσεις Κεφαλαίου 2	21
Κεφάλαιο 3. Άλγεβρα ομάδας, ομομορφισμοί FG -προτύπων, ευθέα αθροίσματα	23
3.1. Άλγεβρα ομάδας	23
3.2. Το κανονικό FG -πρότυπο	25
3.3. Ομομορφισμοί FG -προτύπων	26
Ισόμορφα FG -πρότυπα	27
3.4. Ευθέα αθροίσματα FG -προτύπων	28
Ασκήσεις Κεφαλαίου 3	29
Κεφάλαιο 4. Θεώρημα του Maschke	31
4.1. Θεώρημα του Maschke	31
Ασκήσεις Κεφαλαίου 4	35
Κεφάλαιο 5. Λήμμα του Schur	36
5.1. Λήμμα του Schur	36

5.2. Το κέντρο της άλγεβρας CG	37
5.3. Αναπαραστάσεις πεπερασμένων αβελιανή ομάδων	38
Ασκήσεις Κεφαλαίου 5	39
Κεφάλαιο 6. Η διάσπαση του κανονικού CG -προτύπου	41
6.1. Η διάσπαση του κανονικού CG -προτύπου	41
6.2. Ο χώρος των CG -ομομορφισμών	43
Ασκήσεις Κεφαλαίου 6	45
Κεφάλαιο 7. Χαρακτήρες	46
7.1. Ορισμοί και παραδείγματα	46
7.2. Ιδιότητες	49
Ασκήσεις Κεφαλαίου 7	50
Κεφάλαιο 8. Εσωτερικό γινόμενο χαρακτήρων	51
8.1. Εσωτερικό γινόμενο χαρακτήρων	51
8.2. Συνέπειες της ορθοκανονικότητας των αναγώγων χαρακτήρων	55
Ασκήσεις Κεφαλαίου 8	56
Κεφάλαιο 9. Πίνακας χαρακτήρων	57
9.1. Το πλήθος των αναγώγων χαρακτήρων	57
9.2. Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων	60
Ασκήσεις Κεφαλαίου 9	61
Βιβλιογραφία	63
Ευρετήριο συχνών συμβόλων	64
Ευρετήριο	65

Δράση Ομάδας

Οι ομάδες, όπως και οι σημαντικές ιστορικές προσωπικότητες, είναι γνωστές για τη δράση τους.

Ο σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η εισαγωγή της έννοιας της δράσης ομάδας επί συνόλου που είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες του μαθήματος.

Βασικά σημεία

- Παραδείγματα δράσεων ομάδων
 - Το θεώρημα τροχιάς και σταθεροποιούσας υποομάδας
 - Εφαρμογές
 - Συζυγία μεταθέσεων, τύπος μετάθεσης.
-

1.1. Ορισμοί και Παραδείγματα

Θεωρούμε γνωστές τις βασικές έννοιες και ιδιότητες ομάδων και συμμετρικών ομάδων, όπως υποομάδες, κυκλικές ομάδες, τάξη στοιχείου, θεώρημα του Lagrange, ομομορφισμοί ομάδων, ομάδα πηλίκου, ανάλυση μιας μετάθεσης σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο, πρόσημο μετάθεσης. Αυτά εξετάζονται στα κεφάλαια 7-10 του [7].

Συνήθως θα χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστικό συμβολισμό για την πράξη αφηρημένης ομάδας G

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab.$$

Το ουδέτερο στοιχείο της G θα συμβολίζεται με 1_G ή απλά 1 . Στο μάθημα αυτό, G θα παριστάνει ομάδα, εκτός αν αναφέρεται ρητώς το αντίθετο. Συνεπώς όταν γράφουμε “Εστω $g \in G$ ”, εννοούμε “Εστω G ομάδα και $g \in G$ ”.

Με $S(X)$, όπου X σύνολο, συμβολίζουμε την ομάδα των μεταθέσεων του X . Υπενθυμίζουμε ότι εδώ τα στοιχεία της $S(X)$ είναι οι απεικονίσεις $X \rightarrow X$ που είναι 1-1 και επί, και η πράξη της $S(X)$ δίνεται από τη σύνθεση απεικονίσεων.

Όταν

$$X = \{1, 2, \dots, n\},$$

όπου n θετικός ακέραιος, θα γράφουμε S_n στη θέση του $S(X)$. Αν $\sigma, \tau \in S_n$, τότε με $\sigma \circ \tau$ συμβολίζουμε την απεικόνιση $\sigma \circ \tau \in S_n$ που ορίζεται από

$$\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i)), i = 1, \dots, n.$$

Ορισμός 1.1. Έστω G μια ομάδα και X ένα σύνολο. Μια **δράση** της G στο X είναι μια απεικόνιση

$$\cdot : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

τέτοια ώστε

- (1) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ για κάθε $g_1, g_2 \in G, x \in X$,
- (2) $1 \cdot x = x$ για κάθε $x \in X$, όπου 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο της G .

Δεδομένης της παραπάνω δράσης, θα λέμε συχνά ότι το X είναι G -σύνολο ή ότι η G δρα στο X μέσω της $\cdot$.

Παραδείγματα 1.2.

- (1) Η συμμετρική ομάδα S_n δρα στο $X = \{1, 2, \dots, n\}$ με $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.
Η επαλήθευση των δύο ιδιοτήτων του ορισμού είναι άμεση, η πρώτη ιδιότητα έπεται από τον ορισμό της σύνθεσης απεικονίσεων και η δεύτερη από το γεγονός ότι το ουδέτερο στοιχείο της S_n είναι η ταυτοτική απεικόνιση $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.
- (2) Η γενική γραμμική ομάδα $GL(2, \mathbb{R})$ των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων δρα στο $\mathbb{R}^2$ μέσω γινομένου πινάκων

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη ιδιότητα του ορισμού έπεται από την προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου πινάκων.

- (3) **Δράση της G στη G μέσω αριστερού πολλαπλασιασμού.** Η G δρα στο σύνολο $X = G$ μέσω της

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx,$$

όπου το gx είναι το γινόμενο των g, x στη G .

- (4) **Δράση της G στη G μέσω συζυγίας.** Η G δρα στο σύνολο $X = G$ μέσω της

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gxg^{-1}.$$

Άμεσα επαληθεύονται οι ιδιότητες του ορισμού, καθώς έχουμε για κάθε $g_1, g_2 \in G$,

$$g_1(g_2 x g_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1 g_2)x(g_1 g_2)^{-1} \text{ και } g_1 1 g_1^{-1} = 1.$$

- (5) **Δράση της G στη στο σύνολο των υποομάδων της μέσω συζυγίας.** Εδώ θεωρούμε το σύνολο X των υποομάδων της G . Η G δρα στο X μέσω της

$$G \times X \rightarrow X, (g, K) \mapsto gKg^{-1}.$$

- (6) **Δράση της G στο G/H μέσω αριστερού πολλαπλασιασμού.** Θεωρούμε υποομάδα H της G και το σύνολο $X = G/H$ των αριστερών κλάσεων της H στη G . Η G δρα στο $X = G/H$ μέσω της

$$G \times X \rightarrow X, (g, aH) \mapsto (ga)H.$$

Στα δύο τελευταία παραδείγματα αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι πράγματι έχουμε δράσεις (μην ξεχάσετε στο τελευταίο να ελέγξετε ότι η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη).

Παρατήρηση (Σχέση δράσης με μεταθέσεις). Έστω X ένα G -σύνολο με αντίστοιχη δράση

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Θα δούμε εδώ ότι από την προηγούμενη δράση επάγεται με φυσικό τρόπο ομομορφισμός ομάδων $G \rightarrow S(X)$ από τη G στην ομάδα μεταθέσεων του X .

Πράγματι, για κάθε $g \in G$ ορίζεται η απεικόνιση

$$\alpha_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x.$$

Εύκολα επαληθεύεται η α_g είναι 1-1 και επί: Για το 1-1 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g \cdot x_1 = g \cdot x_2 &\Rightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot x_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot x_2) \Rightarrow \\ (g^{-1}g) \cdot x_1 &= (g^{-1}g) \cdot x_2 \Rightarrow 1 \cdot x_1 = 1 \cdot x_2 \Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Για το επί σημειώνουμε ότι αν $y \in G$, τότε θέτοντας $x = g^{-1} \cdot y$ έχουμε:

$$g \cdot x = g \cdot (g^{-1} \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = 1 \cdot y = y.$$

Έτσι λαμβάνουμε μια απεικόνιση

$$\alpha : G \rightarrow S(X), g \mapsto \alpha_g$$

και είναι υπόθεση ρουτίνας η απόδειξη ότι αυτή είναι ομομορφισμός ομάδων.

Θα δούμε τώρα και ένα αποτέλεσμα στην αντίστροφη κατεύθυνση. Έστω ότι G είναι ομάδα και X σύνολο (όχι αναγκαστικά G -σύνολο). Έστω ότι έχουμε έναν ομομορφισμό ομάδων

$$\alpha : G \rightarrow S(X).$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \alpha(g)(x).$$

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι πρόκειται περί δράσης της G στο X και επίσης ότι ο ομομορφισμός ομάδων που επάγεται από αυτή είναι ο αρχικός $\alpha : G \rightarrow S(X)$.

Μιλώντας πρόχειρα, το συμπέρασμα της παρατήρησης είναι ότι είτε μιλάμε για δράση ομάδας G σε σύνολο X είτε για ομομορφισμό ομάδων από τη G στις μεταθέσεις του X , είναι το ίδιο πράγμα.

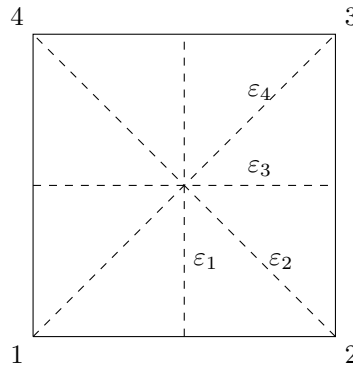
Ας δούμε δύο παραδείγματα όπου χρησιμοποιείται η προηγούμενη ιδέα.

Παραδείγματα 1.3.

- (1) Θεωρούμε τη διεδρική ομάδα D_4 , δηλαδή την ομάδα των συμμετριών του τετραγώνου. Ξέρουμε ότι

$$D_4 = \{1, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\},$$

όπου r_i είναι η περιστροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}i$ και s_j είναι η ανάκλαση ως προς τον άξονες συμμετρίας ε_j που φαίνεται στο σχήμα. Βλέπε [7, Παράδειγμα 7.4.10]. Η D_4 δρα στο σύνολο $X = \{1, 2, 3, 4\}$ των κορυφών του τετραγώνου με $f \cdot P = f(P)$, όπου $f \in D_4$ και $P \in X$.



Για παράδειγμα $r_1 \cdot 1 = 2$, $r_1 \cdot 2 = 3$, $r_1 \cdot 3 = 4$, $r_1 \cdot 4 = 1$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση που είδαμε πριν, για τον αντίστοιχο ομομορφισμό ομάδων

$$\alpha : D_4 \rightarrow S(X)$$

έχουμε

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{r_1} = (1234), \alpha_{r_2} = (13)(24), \alpha_{r_3} = (1432),$$

$$\alpha_{s_1} = (12)(34), \alpha_{s_2} = (13), \alpha_{s_3} = (14)(23), \alpha_{s_4} = (24).$$

Παρατηρούμε ότι εδώ ο ομομορφισμός α είναι μονομορφισμός. Μας επιτρέπει να βλέπουμε την ομάδα D_4 ως συγκεκριμένη υποομάδα της S_4 .

- (2) Έστω ομάδα G (όχι αναγκαστικά πεπερασμένη) που έχει γνήσια υποομάδα K πεπερασμένου δείκτη. Θα δείξουμε ότι η G έχει γνήσια κανονική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.

Θεωρούμε τη δράση της G στο $X = G/K$ μέσω αριστερού πολλαπλασιασμού. Σύμφωνα με την παρατήρηση που είδαμε πριν, έχουμε ομομορφισμό ομάδων $\alpha : G \rightarrow S(X)$. Επειδή το X είναι πεπερασμένο σύνολο, η ομάδα $S(X)$ είναι πεπερασμένη. Ο πυρήνας $\ker \alpha$ είναι κανονική υποομάδα της G και επιπλέον έχει πεπερασμένο δείκτη στη G διότι από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων [7, Θεώρημα 10.7], έπεται ότι η ομάδα $G/\ker \alpha$ είναι ισόμορφη με υποομάδα της πεπερασμένης $S(X)$. Επιπλέον έχουμε $\ker \alpha \neq G$ καθώς $K \neq G$ (γιατί;).

1.2. Τροχιές και σταθεροποιούσες υποομάδες

Έστω G μια ομάδα και X ένα G σύνολο. Ορίζουμε την ακόλουθη σχέση στο X

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists g \in G, g \cdot x = x'.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι είναι σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας του x είναι $\{g \cdot x \in X : g \in G\}$ και τη συμβολίζουμε συνήθως με $\mathcal{O}_x$.

Ορισμός 1.4. Έστω G μια ομάδα, X ένα G σύνολο και $x \in X$.

(1) Η **τροχιά** του x είναι το σύνολο

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \in X : g \in G\}.$$

(2) Η **σταθεροποιούσα υποομάδα** G_x που αντιστοιχεί στο x είναι το σύνολο

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι το G_x είναι πράγματι υποομάδα της G . Χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\text{Stab}(x) = G_x$.

Από τις σχέσεις ισοδυναμίας, ξέρουμε ότι δύο τροχιές ή ταυτίζονται ή είναι ξένα σύνολα και ότι το X μπορεί να παρασταθεί ως ξένη ένωση τροχιών. Βλέπε [7, 2.2].

Παραδείγματα 1.5.

(1) Έστω

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 9 & 8 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$$

και έστω $G = \langle \sigma \rangle$ η κυκλική υποομάδα της S_9 που παράγεται από το σ . Η G δρα στο σύνολο $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ με $\sigma \cdot i = \sigma(i)$. Για την τροχιά του $1 \in X$ έχουμε

$$\sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = \sigma(3) = 5, \sigma^3(1) = \sigma(5) = 9, \sigma^4(1) = \sigma(9) = 1$$

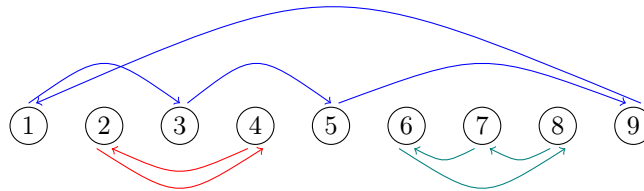
και άρα

$$\mathcal{O}_1 = \{1, 3, 5, 9\}$$

Όμοια έχουμε

$$\mathcal{O}_2 = \{2, 4\}, \mathcal{O}_6 = \{6, 8, 7\}$$

Εποπτικά, η δράση της G και οι τρεις τροχιές φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1. Οι τροχιές της δράσης.

Έχουμε την ξένη ένωση

$$X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_6.$$

Σημειώνουμε ότι οι τροχιές αντιστοιχούν στην ανάλυση της σ σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο

$$\sigma = (1359)(24)(678).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι έχουμε τις σταθεροποιούσες υποομάδες

$$G_1 = G_3 = G_5 = G_9 = \langle \sigma^4 \rangle = \{1, \sigma^4, \sigma^8\},$$

$$G_2 = G_4 = \langle \sigma^2 \rangle = \{1, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6, \sigma^8, \sigma^{10}\},$$

$$G_6 = G_7 = G_8 = \langle \sigma^3 \rangle = \{1, \sigma^3, \sigma^6, \sigma^9\}.$$

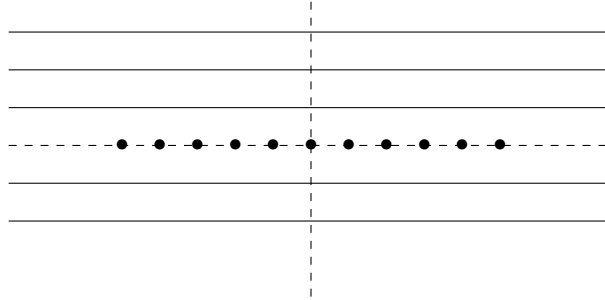
- (2) Θεωρούμε την ομάδα $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Η G δρα στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ όπως στο Παράδειγμα 1.2(2),

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + ac_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Εδώ οι τροχιές είναι δύο ειδών,

η τροχιά ενός σημείου $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ με $c_2 \neq 0$ είναι η ευθεία $y = c_2$

η τροχιά ενός σημείου $P = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι το μονοσύνολο $\{P\}$.



Σχήμα 2. Οι τροχιές της δράσης.

Ας δούμε τώρα τις τροχιές και τις σταθεροποιούσες υποομάδες στο Παράδειγμα 1.2 (4).

Παραδείγματα 1.6. Θεωρούμε τη δράση της G στη G μέσω συζυγίας. Εδώ η τροχιά του $x \in G$ είναι

$$\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} \in G : g \in G\}$$

και ονομάζεται **κλάση συζυγίας** του x . Δηλαδή είναι το υποσύνολο της G των συζυγών στοιχείων του x . Συμβολίζεται συχνά με $cl(x)$. Θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια ότι οι κλάσεις συζυγίας της G διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία αναπαραστάσεων της G . Η σταθεροποιούσα υποομάδα του $x \in G$ είναι

$$G_x = \{g \in G : gx = xg\}$$

και ονομάζεται **κεντροποιούσα υποομάδα** του x . Συνήθως συμβολίζεται με $C_G(x)$ ή απλά $C(x)$.

Για παράδειγμα, αν $G = S_3$ και $x = (12), y = (123)$, τότε

$$cl(x) = \{(12), (13), (23)\} \text{ και } G_x = \{e, (12)\},$$

$$cl(y) = \{(123), (132)\} \text{ και } G_y = \{e, (123), (132)\},$$

Το ακόλουθο θεώρημα λέει ότι το πλήθος των στοιχείων μιας τροχιάς ισούται με το δείκτη της αντίστοιχης σταθεροποιούσας υποομάδας. Ποτέ δεν υποτιμούμε αποτέλεσμα που απαριθμεί κάτι.

Θεώρημα 1.7 (θεώρημα τροχιάς-σταθεροποιούσας υποομάδας). Έστω G μια ομάδα, X ένα G σύνολο και $x \in X$. Τότε

$$|\mathcal{O}_x| = [G : G_x].$$

Απόδειξη. Έστω $g, h \in G$. Επειδή έχουμε

$$g \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow x = (g^{-1}h) \cdot x \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x,$$

έπεται ότι η απεικόνιση

$$G/G_x \rightarrow \mathcal{O}_x, \quad gG_x \mapsto g \cdot x$$

είναι καλά ορισμένη και 1-1. Είναι σαφές ότι είναι και επί, οπότε $[G : G_x] = |\mathcal{O}_x|$. $\square$

Από το προηγούμενο θεώρημα και το Παράδειγμα 1.2(4) έπεται άμεσα το εξής.

Πόρισμα 1.8. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $x \in G$. Τότε το πλήθος των στοιχείων της κλάσης συζυγίας του x ισούται με το δείκτη

$$[G : C_G(x)]$$

της κεντροποιούσας υποομάδας του x .

Ξένη ένωση τροχιών. Έστω ότι έχουμε πεπερασμένη ομάδα G που δρα σε πεπερασμένο σύνολο X . Επειδή οι τροχιές της δράσης είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης ισοδυναμίας που ορίσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου, έχουμε την ξένη ένωση

$$X = \mathcal{O}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{x_t},$$

όπου $\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_t}$ είναι οι διακεκριμένες τροχιές. Άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$(1.1) \quad |X| = |\mathcal{O}_{x_1}| + \dots + |\mathcal{O}_{x_t}| = [G : G_{x_1}] + \dots + [G : G_{x_t}].$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Lagrange, η παραπάνω αριθμητική σχέση λέει ότι ο θετικός ακέραιος $|X|$ είναι άθροισμα θετικών διαιρετών της τάξης της G . Αυτή η παρατήρηση είναι συχνά χρήσιμη. Ακολουθεί μια ειδική περίπτωση της (1.1) που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

Εξίσωση κλάσεων. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $cl(y_1), \dots, c; (y_s)$ οι κλάσεις συζυγίας της G . Θεωρώντας τη δράση της G στη G μέσω συζυγίας, έχουμε την ξένη ένωση

$$G = cl(y_1) \cup \dots \cup cl(y_s).$$

Θυμίζουμε ότι το κέντρο της G είναι

$$Z(G) = \{a \in G : ag = ga, \text{ για κάθε } a \in G\}$$

και ότι πρόκειται για κανονική υποομάδα της G .

Παρατηρούμε ότι μια κλάση συζυγίας $cl(x)$ αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο, $cl(x) = \{x\}$, αν και μόνο αν

$$gx = xg \text{ για κάθε } g, \text{ δηλαδή αν και μόνο αν } x \in Z(G).$$

Με άλλα λόγια, το σύνολο $Z(G)$ είναι η ένωση όλων εκείνων των κλάσεων συζυγίας που καθεμιά έχει μοναδικό στοιχείο. Συνεπώς η παραπάνω ξένη ένωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$G = Z(G) \cup cl(x_1) \dots \cup cl(x_t),$$

όπου $cl(x_1), \dots, cl(x_t)$ είναι όλες οι κλάσεις συζυγίας της G που η καθεμιά έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία. Από αυτό και το Πρόρισμα 1.8(1) παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 1.9 (Εξίσωση κλάσεων). Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Τότε

$$|G| = |Z(G)| + [G : C_G(x_1)] + \dots + [G : C_G(x_t)],$$

όπου τα $x_1, \dots, x_t$ είναι αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G που έχουν τουλάχιστον 2 στοιχεία.

Η ισότητα στο παραπάνω πόρισμα είναι γνωστή ως η εξίσωση κλάσεων και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Εφαρμογή 1.10. Έστω G ομάδα τάξης p^n , όπου p πρώτος και $n > 0$. Τότε το κέντρο της G είναι μη τετριμμένο. Ιδιαίτερα, αν $n = 2$, τότε η G είναι αβελιανή.

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό, το ζητούμενο είναι σαφές αν η G είναι αβελιανή.

Υποθέτουμε ότι η G δεν είναι αβελιανή, ισοδύναμα υπάρχει κλάση ισοδυναμίας με τουλάχιστον 2 στοιχεία. Στο δεξί μέλος της εξίσωσης κλάσεων, κάθε αχέραιος $[G : C_G(x_i)]$ είναι πολλαπλάσιος του p . Από την υπόθεση, το αριστερό σκέλος είναι πολλαπλάσιο του p και επομένως το ίδιο συμβαίνει με το $|Z(G)|$. Ειδικά, $Z(G) \neq \{1\}$.

Έστω ότι $|G| = p^2$. Από τον πρώτο ισχυρισμό έχουμε $|Z(G)| > 1$, οπότε από το θεώρημα του Lagrange έχουμε

$$|Z(G)| = p, p^2.$$

Στην πρώτη περίπτωση η ομάδα πηλίκου $G/Z(G)$ είναι κυκλική (γιατί έχει τάξη πρώτο αριθμό) και επομένως η G είναι αβελιανή σύμφωνα με την [7, άσκηση 10.5]. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $G = Z(G)$, οπότε η G είναι πάλι αβελιανή. $\square$

Σταθερά σημεία δράσης. Έστω X ένα G -σύνολο. Είναι δυνατό να υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $g \in G$ να ισχύει $g \cdot x = x$. Κάθε τέτοιο στοιχείο του X λέγεται **σταθερό σημείο** της δράσης της G . Το σύνολο αυτών συμβολίζεται X^G ή $\text{Fix}_G(X)$, δηλαδή

$$X^G = \{x \in X : g \cdot x = x \ \forall g \in G\}$$

και λέγεται το **σύνολο των σταθερών σημείων** της δράσης της G . Από τους ορισμούς έπεται άμεσα ότι ένα $x \in X$ είναι σταθερό σημείο αν και μόνο αν η τροχιά του είναι μονοσύνολο, δηλαδή

$$(1.2) \quad x \in X^G \Leftrightarrow \mathcal{O}_x = \{x\}.$$

Παράδειγμα 1.11. Το σύνολο των σταθερών σημείων της δράσης της G στη G μέσω συζυγίας (Παράδειγμα 1.2(4)) είναι το κέντρο $Z(G)$ της G .

■ **Ορισμός 1.12.** Έστω p πρώτος. Μια ομάδα τάξης p^n λέγεται p -ομάδα.

Το επόμενο λήμμα παρέχει την ύπαρξη σταθερού σημείου όταν δρα p -ομάδα σε πεπερασμένο σύνολο που το πλήθος των στοιχείων του δεν είναι πολλαπλάσιο του p .

Λήμμα 1.13. Έστω G μια p -ομάδα και X ένα πεπερασμένο G -σύνολο. Τότε

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

Ειδικά, αν το $|X|$ δεν διαιρείται με το p , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο της δράσης της G .

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (1.1) και (1.2) έχουμε

$$|X| = |X^G| + |\mathcal{O}_{y_1}| + \dots + |\mathcal{O}_{y_s}|,$$

όπου $\mathcal{O}_{y_i}, i = 1, \dots, s$, είναι οι τροχιές (αν υπάρχουν) με $|\mathcal{O}_{y_i}| > 1$. Από το Θεώρημα τροχιάς-σταθεροποιούσας υποομάδας έχουμε

$$|\mathcal{O}_{y_i}| = [G : G_{y_i}]$$

οπότε ασύμφωνα με το θεώρημα του Lagrange, κάθε $|\mathcal{O}_{y_i}|$ είναι διαιρέτης του p^n . Επειδή $|\mathcal{O}_{y_i}| > 1$, κάθε $|\mathcal{O}_{y_i}|$ είναι πολλαπλάσιο του p . Από την πρώτη σχέση έπεται το ζητούμενο. $\square$

Το προηγούμενο λήμμα θα βρει εφαρμογές σε παρακάτω κεφάλαια.

1.3. Κλάσεις συζυγίας της συμμετρικής ομάδας

Θυμίζουμε ότι μια μετάθεση $\tau \in S_n$ λέγεται **κυκλική μετάθεση** (ή **κύκλος**) αν υπάρχουν $a_1, a_2, \dots, a_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, ώστε

$$\tau(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \sigma(a_3) = a_4, \dots, \tau(a_{m-1}) = a_m, \tau(a_m) = a_1, \text{ και}$$

$$\tau(i) = i \text{ για κάθε } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}.$$

Το m λέγεται το **μήκος** της κυκλικής μετάθεσης και συμβολίζεται $\ell(\tau)$. Συμβολίζουμε τον παραπάνω κύκλο με $\tau = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$.

Ξέρουμε ότι κάθε $\sigma \in S_n$ γράφεται ως γινόμενο κύκλων σ_i ξένων ανά δύο

$$(1.3) \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k,$$

βλέπε [7, Θεώρημα 7.13]. Επίσης ξέρουμε ότι ξένοι κύκλοι αντιμετατίθενται. Συνεπώς στην παράσταση (1.3) μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα μήκη $\ell(\sigma_1), \dots, \ell(\sigma_k)$ των κύκλων σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία θετικών ακεραίων

$$(1.4) \quad \ell(\sigma_1) \geq \ell(\sigma_2) \geq \dots \geq \ell(\sigma_k).$$

Η φθίνουσα ακολουθία αυτή λέγεται ο **τύπος** της μετάθεσης. Επίσης λέμε ότι η σ έχει τύπο την (1.4) Για παράδειγμα, αν

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 9 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_9,$$

τότε

$$\sigma = (24)(1359)(7)(68) = (1359)(24)(68)(7)$$

και η ακολουθία των μηκών των κύκλων στη δεύτερη παράσταση της σ είναι $(4, 2, 2, 1)$. Δηλαδή η σ είναι τύπου $(4, 2, 2, 1)$. Και η $\tau = (2468)(17)(36)(5)$ είναι τύπου $(4, 2, 2, 1)$.

Θεώρημα 1.14. Δύο μεταθέσεις της S_n είναι συζυγή στοιχεία αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο τύπο.

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύεται ότι αν $(i_1 i_2 \cdots i_m) \in S_n$ είναι κύκλος μήκους k , τότε για κάθε $\sigma \in S_n$ έχουμε

$$(1.5) \quad \sigma(i_1 i_2 \cdots i_m)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \cdots \sigma(i_m))$$

που επίσης είναι κύκλος μήκους k . Αν τώρα $\tau \in S_n$ είναι τυχαία, θεωρούμε ανάλυσή της

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$$

σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο με φθίνοντα μήκη. Επειδή

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\tau_2\sigma^{-1}) \cdots (\sigma\tau_k\sigma^{-1})$$

συμπεραίνουμε ότι οι μεταθέσεις $\sigma\tau\sigma^{-1}$ και τ έχουν τον ίδιο τύπο. Με άλλα λόγια, συζυγή στοιχεία της ομάδας S_n έχουν τον ίδιο τύπο.

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε αρχικά την ειδική περίπτωση που έχουμε δύο κύκλους

$$(i_1 i_2 \cdots i_m), (j_1 j_2 \cdots j_m) \in S_n$$

με ίσα μήκη. Οι κύκλοι αυτοί είναι συζυγή στοιχεία γιατί θεωρώντας $\sigma \in S_n$ που ικανοποιεί

$$\sigma(i_1) = j_1, \sigma(i_2) = j_2, \dots, \sigma(i_m) = j_m$$

έχουμε τη σχέση (1.5).

Γενικά τώρα, ας θεωρήσουμε $\rho, \rho' \in S_n$ με ίσους τύπους. Συνεπώς έχουμε για την καθεμιά αναλύσεις σε γινόμενα κύκλων ξένων ανά δύο της μορφής

$$\rho = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k$$

$$\rho' = \rho'_1 \rho'_2 \cdots \rho'_k$$

όπου οι κύκλοι ρ_i, ρ'_i έχουν το ίδιο μήκος για κάθε i . Χρησιμοποιώντας αυτό που είπαμε στην ειδική περίπτωση και το γεγονός ότι οι κύκλοι $\rho_1, \dots, \rho_k$ είναι ξένοι ανά δύο και ομοίως οι $\rho'_1, \dots, \rho'_k$ είναι ξένοι αν δύο, βλέπουμε ότι υπάρχει $\sigma \in S_n$ τέτοιο ώστε

$$\sigma\rho_i\sigma^{-1} = \rho'_i \text{ για κάθε } i = 1, \dots, k.$$

Συνεπώς έχουμε $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho'$. □

Ορισμός 1.15. Διαμέριση του θετικού ακεραίου n είναι φθίνουσα ακολουθία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ θετικών ακεραίων λ_i με $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$.

Συνεπώς βλέπουμε ότι υπάρχει μια παραμέτρηση των κλάσεων συζυγίας της S_n από τις διαμερίσεις του n . Ακριβέστερα έχουμε το εξής

Πόρισμα 1.16. Υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων συζυγίας της συμμετρικής ομάδας S_n και των διαμερίσεων του n που αντιστοιχίζει σε μια μετάθεση τον τύπο της.

Για παράδειγμα, οι διαμερίσεις του 3 και οι αντίστοιχες κλάσεις συζυγίας της S_3 δίνονται παρακάτω

Διαμερίσεις του 3	Κλάσεις συζυγίας της S_3
(3)	{(123), (213)}
(2,1)	{(12)(3), (13)(2), (23)(1)}
(1,1,1)	{(1)(2)(3)}

Συνήθως θα παραλείπουμε τους κύκλους μήκους 1. Με αυτή την παράλειψη, η αντιστοιχία της S_4 είναι η ακόλουθη.

Διαμερίσεις του 4	Κλάσεις συζυγίας της S_4
(4)	{(1234), (1432), (1324), (1423), (1243), (1342)}
(3,1)	{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)}
(2,2)	{(12)(34), (13)(24), (14)(23)}
(2,1,1)	{(12), (13), (14), (23), (24), (34)}
(1,1,1,1)	{1}.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

- Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 39 που δρα σε σύνολο 20 στοιχείων έχει σταθερό σημείο.
- Δίνεται ότι η S_3 δρα σε ένα σύνολο X τεσσάρων στοιχείων έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $g \in G$ με $g \cdot x \neq x$. Ποιο είναι το πλήθος των τροχιών και πόσα στοιχεία έχει η καθεμία;
- Θεωρούμε τη δράση της D_4 στις κορυφές τετραγώνου όπως στο Παράδειγμα 1.2 (1). Ποια είναι η σταθεροποιούσα υποομάδα της κορυφής 1; Επεκτείνουμε κατά τον προφανή τρόπο σε δράση επί του συνόλου των πλευρών. Ποια είναι η σταθεροποιούσα της πλευράς 12;
- Η ομάδα $GL(2, \mathbb{R})$ δρα στο $\mathbb{R}^2$ μέσω γινομένου πινάκων

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Πόσες τροχιές έχει η δράση και ποιες είναι; Ποια είναι η τροχιά του $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Έστω G μια ομάδα και X ένα G -σύνολο. Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ και $x \in X$, οι σταθεροποιούσες υποομάδες G_x, G_{gx} είναι συζυγείς.
- (Λήμμα του Burnside)¹ Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα που δρα επί πεπερασμένου συνόλου X . Για κάθε $g \in G$, ορίζουμε

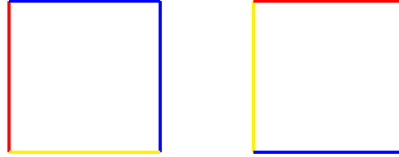
$$\text{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$$

¹Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό με διάφορες ονομασίες. Μία από αυτές είναι "lemma that is not Burnside's", καθώς ο ίδιος (1897) το απέδωσε στον Frobenius (1887). Βλέπε https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside's_lemma

το σύνολο των σταθερών σημείων του στοιχείου g . Δείξτε ότι το πλήθος των τροχιών ισούται με το μέσο όρο

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

7. Οι πλευρές ενός τετραγώνου μπορούν να χρωματισθούν με n διαφορετικά χρώματα. (Κάθε πλευρά έχει ένα χρώμα και είναι δυνατό διαφορετικές πλευρές να έχουν το ίδιο χρώμα.) Δύο χρωματισμοί θεωρούνται ίδιοι αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο εφαρμόζοντας μια περιστροφική συμμετρία του τετραγώνου. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών ισούται με $\frac{n^4+n^2+2n}{4}$.



Σχήμα 3. Παράδειγμα ίδιου χρωματισμού.

Στη συνέχεια βρείτε το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών θεωρώντας ότι δύο χρωματισμοί είναι ίδιοι αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο εφαρμόζοντας μια ισομετρία του τετραγώνου. Απάντηση : $\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{8}$.

8. Έστω G ομάδα που έχει τουλάχιστον μία κλάση συζυγίας με ακριβώς δύο στοιχεία. Δείξτε ότι η G περιέχει γνήσια μη τετριμμένη κανονική υποομάδα.
9. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και N κανονική υποομάδα της G . Δείξτε ότι αν $cl(x)$ είναι μια κλάση συζυγίας της G , τότε $cl(x) \subseteq N$ ή $cl(x) \cap N = \emptyset$. Στη συνέχεια δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, \dots, x_s \in G$ με $N = |cl(x_1)| + \dots + |cl(x_s)|$.
10. Έστω G μια p -ομάδα και N μη τετριμμένη κανονική υποομάδα της G . Δείξτε ότι $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.
11. Έστω G μια p -ομάδα τάξης p^n . Δείξτε ότι η G έχει κανονική υποομάδα τάξης p^{n-1} .
12. Χρησιμοποιήστε δράσεις για να δείξτε ότι αν p είναι ο ελάχιστος πρώτος που διαιρεί την τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας G και H είναι υποομάδα της G με δείκτη p , τότε H είναι κανονική στη G .
13. Έστω G πεπερασμένη ομάδα τάξης n . Επιλέγουμε τυχαία δύο στοιχεία της G με επανατοποθέτηση. Δείξτε ότι η πιθανότητα αυτά να αντιμετατίθενται ισούται με t/n , όπου t είναι το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G .

Αναπαραστάσεις Ομάδων

Ο σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η εισαγωγή της έννοιας της αναπαράστασης και του FG -προτύπου.

Βασικά σημεία

- Αναπαραστάσεις και FG -πρότυπα
- Ισοδυναμία αναπαραστάσεων
- FG -υποπρότυπα, ανάγωγα FG -πρότυπα

Στο κεφάλαιο αυτό, G είναι ομάδα και F σώμα. Στα επόμενα κεφάλαια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση $F = \mathbb{C}$.

2.1. Ορισμοί και Παραδείγματα

Υπενθυμίζουμε ότι η γενική γραμμική ομάδα $GL_n(F)$ αποτελείται από τους $n \times n$ αντιστρέψιμους πίνακες με στοιχεία από το F και η πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων. Με I_n ή απλά I αν είναι σαφές ποιο είναι το n συμβολίζουμε τον $n \times n$ ταυτοτικό πίνακα. Ειδικά για $n = 1$, έχουμε

$$GL_1(F) = F^*$$

που είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών στοιχείων του F .

Ορισμός 2.1. Μια *αναπαράσταση* της G είναι ομομορφισμός ομάδων

$$\rho : G \rightarrow GL_n(F).$$

Ο n λέγεται ο *βαθμός* της αναπαράστασης ρ και συμβολίζεται με $n = \deg \rho$.

Άρα σε μια αναπαράσταση ρ της G ισχύει

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

για κάθε $g, h \in G$, όπου $\rho(g)\rho(h)$ είναι το γινόμενο των πινάκων $\rho(g), \rho(h)$. Ειδικά,

$$\rho(1_g) = I_n$$

και

$$\rho(g^m) = \rho(g)^m$$

για κάθε ακέραιο $m \in \mathbb{Z}$.

Παραδείγματα 2.2.

- (1) **Τετριμμένη αναπαράσταση.**

$$\rho : G \rightarrow GL_1(F), \rho(g) = 1$$

για κάθε $g \in G$.

- (2) **Αναπαράσταση προσήμου της συμμετρικής ομάδας.**

$$\text{sign} : S_n \rightarrow GL_1(F),$$

όπου $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης, βλ. [7, Παράδειγμα 9.2(9)].

- (3) Θεωρούμε τη διεδρική ομάδα D_4 (των συμμετριών του τετραγώνου),

$$D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle$$

και ορίζουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Με πράξεις επαληθεύονται οι σχέσεις

$$A^4 = B^2 = I, AB = BA^{-1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι θέτοντας

$$\rho(a^i b^j) = A^i B^j, 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1,$$

έχουμε καλά ορισμένη απεικόνιση $\rho : D_4 \rightarrow GL_2(F)$ που είναι ομομορφισμός ομάδων.

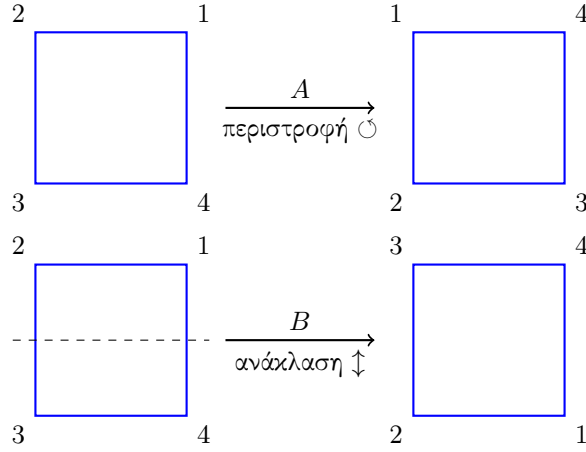
Γεωμετρικά, ο πίνακας A παριστάνει στροφή του επιπέδου κατά μία ορθή γωνία και ο B παριστάνει ανάκλαση ως προς τον άξονα των x όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Συνεπώς η συγκεκριμένη αναπαράσταση ρ αναπαριστάνει την αφηρημένη ομάδα D_4 ως ομάδα μετασχηματισμών του επιπέδου.

- (4) Αν ρ είναι αναπαράσταση της G βαθμού n , τότε παίρνουμε μια αναπαράσταση ρ' της G βαθμού 1 ορίζοντας $\rho'(g) = \det(\rho(g))$, όπου $\det(\rho(g))$ είναι η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $\rho(g)$.

Αν $\rho : G \rightarrow GL_n(F)$ είναι αναπαράσταση της G και $T \in GL_n(F)$, τότε η $\rho' : G \rightarrow GL_n(F)$, $\rho'(g) = T^{-1}\rho(g)T$ είναι αναπαράσταση της G , αφού

$$\begin{aligned} \rho'(gh) &= T^{-1}\rho(gh)T = T^{-1}\rho(g)\rho(h)T \\ &= T^{-1}\rho(g)TT^{-1}\rho(h)T = \rho'(g)\rho'(h) \end{aligned}$$

για κάθε $g, h \in G$.



Σχήμα 1. Γεωμετρική σημασία των $A = \rho(a), B = \rho(b)$.

Ορισμός 2.3. Δύο αναπαραστάσεις της G του ίδιου βαθμού

$$\rho, \rho' : G \rightarrow GL_n(F)$$

λέγονται *ισοδύναμες* αν υπάρχει $T \in GL_n(F)$ ώστε $\rho'(g) = T^{-1}\rho(g)T$ για κάθε $g \in G$.

Παράδειγμα 2.4.

- (1) Θεωρώντας την αναπαράσταση $\rho : D_4 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ του Παραδείγματος 2.2(3) και επιλέγοντας $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ έχουμε

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς λαμβάνουμε μια νέα αναπαράσταση ρ' της D_4 που ορίζεται από

$$\rho'(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho'(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ρ, ρ' είναι ισοδύναμες.

- (2) Θεωρούμε την κυκλική ομάδα τάξης 4, $G = C_4 = \langle a : a^4 = 1_G \rangle$. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$A^4 = B^4 = I.$$

Άρα έχουμε αναπαραστάσεις

$$\rho, \rho' : G \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$$

που ορίζονται από

$$\rho(a) = A, \quad \rho'(a) = B.$$

Ξέρουμε από τη ΓΑ ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος (δηλαδή το ίδιο άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων). Επειδή τα ίχνη των A, B είναι $1, -1$ αντίστοιχα, οι πίνακες αυτοί δεν είναι όμοιοι. Άρα οι αναπαραστάσεις ρ, ρ' δεν είναι ισοδύναμες.

- (3) Επειδή ο πολλαπλασιασμός του F είναι μεταθετικός, η μοναδική αναπαράσταση της G που είναι ισοδύναμη με την τετριμμένη αναπαράσταση (Παράδειγμα 2.2 (1)) είναι η τετριμμένη αναπαράσταση.

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι στο σύνολο των αναπαραστάσεων της G βαθμού n , ο παραπάνω ορισμός δίνει μια σχέση ισοδυναμίας, βλ. άσκηση 1.

Ορισμός 2.5. *Μια αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_n(F)$ της G λέγεται **πιστή** αν ο ομομορφισμός ομάδων ρ είναι 1-1, δηλαδή αν ο πυρήνας είναι τετριμμένος $\ker(\rho) = 1$.*

Παρατηρούμε ότι αν μια αναπαράσταση ρ της G είναι πιστή, τότε η G είναι ισόμορφη με την εικόνα $\text{Im}(\rho)$ της ρ .

Θεωρώντας την αναπαράσταση $\rho : D_4 \rightarrow GL_2(F)$ του Παραδείγματος 2.2(3), έχουμε ότι ο μοναδικός πίνακας μεταξύ των $A^i B^j$, $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, που ισούται με τον ταυτοτικό είναι ο ταυτοτικός ($i = j = 0$). Άρα η ρ είναι πιστή.

Παρατηρούμε ότι η τετριμμένη αναπαράσταση είναι πιστή αν και μόνο αν η ομάδα G είναι τετριμμένη.

Το βασικό πρόβλημα της θεωρίας αναπαραστάσεων είναι η εύρεση και μελέτη των αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων.

2.2. FG -πρότυπα

Θα δούμε εδώ έναν ισοδύναμο ορισμό της έννοιας της αναπαράστασης.

Ορισμός 2.6. *Έστω G μια ομάδα και V ένας F -διανυσματικός χώρος. Θα λέμε ότι το V είναι **FG -πρότυπο** αν υπάρχει δράση της G στο V*

$$G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto gv,$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες για κάθε $g \in G$, $\lambda \in F$ και $u, v \in V$

- (1) $g(\lambda v) = \lambda g(v)$,
- (2) $g(u + v) = gu + gv$.

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό, για κάθε $g \in G$ έχουμε την απεικόνιση

$$(2.1) \quad V \rightarrow V, v \mapsto gv$$

που είναι γραμμική. Μάλιστα είναι ισομορφισμός με αντίστροφη τη

$$V \rightarrow V, v \mapsto g^{-1}v.$$

Θα δούμε τώρα τη σύνδεση μεταξύ των εννοιών αναπαράσταση ομάδων και FG -πρότυπο.

Αναπαράστασεις και FG -πρότυπα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε αναπαράσταση της G , $\rho : G \rightarrow GL_n(F)$. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V = F^n$ και σχεφτόμαστε τα στοιχεία του ως πίνακες στήλες

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(δηλαδή τυπικά έχουμε $V = F^{n \times 1}$ αλλά θα γράφουμε απλά F^n). Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι το V γίνεται FG -πρότυπο ορίζοντας

$$gv = \rho(g)v, (g \in G, v \in V),$$

όπου στο δεξί μέλος έχουμε γινόμενο του $n \times n$ πίνακα $\rho(g)$ με τον πίνακα στήλη $v \in F^n$.

Αντίστροφα, έστω ότι έχουμε FG -πρότυπο V πεπερασμένης διάστασης n . Επιλέγουμε μια βάση $\mathcal{B}$ του V και θεωρούμε για κάθε $g \in G$ τον πίνακα $[g]_{\mathcal{B}}$ της γραμμικής απεικόνισης (2.1). Έτσι έχουμε αναπαράσταση της G ,

$$\rho : G \rightarrow GL_n(F),$$

που ορίζεται από

$$\rho(g) = [g]_{\mathcal{B}}.$$

Μιλώντας ελεύθερα, είτε αναφερόμαστε σε αναπαράσταση της G είτε σε FG -πρότυπο που είναι αντίστοιχα σύμφωνα με την παραπάνω έννοια, είναι το ίδιο. Στις σημειώσεις αυτές θα έχουμε μια προτίμηση σε FG -πρότυπα.

Το **τετριμμένο** FG -πρότυπο είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 1 με δράση της G που δίνεται από $gv = v$ για κάθε $g \in G, v \in V$. Σαφώς είναι το FG -πρότυπο που αντιστοιχεί στην τετριμμένη αναπαράσταση.

Παρατήρηση. Συχνά στην πράξη, ξεκινάμε με μια δράση της G σε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ του διανυσματικού χώρου V . Τότε επεκτείνοντας τη δράση της G σε όλο το V μέσω της σχέσης

$$g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 g v_1 + \dots + \lambda_n g v_n \quad (g \in G, \lambda_i \in F, v_i \in \mathcal{B}),$$

έχουμε ότι το V είναι FG -πρότυπο. (Απόδειξη ρουτίνας.)

Μια σημαντική οικογένεια παραδειγμάτων είναι τα λεγόμενα πρότυπα μετάθεσης.

Παράδειγμα 2.7 (Πρότυπα μετάθεσης). Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V διάστασης n , μια βάση του $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ και μια υποομάδα G της συμμετρικής ομάδας S_n . Ορίζουμε

$$\sigma v_i = v_{\sigma(i)} \quad (v_i \in \mathcal{B}, \sigma \in G).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι έχουμε δράση της G στο σύνολο $\mathcal{B}$. Σύμφωνα με την παρατήρηση που προηγήθηκε, αυτή επεκτείνεται σε δράση της G στο V και έχουμε ότι το V είναι FG -πρότυπο. Συνήθως το V ονομάζεται **FG -πρότυπο μετάθεσης**, καθώς τα στοιχεία της G μεταθέτουν τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}$.

Για παράδειγμα, έστω $n = 3$ και $G = S_3$. Για $\sigma = (13)$, έχουμε

$$\sigma v_1 = v_3, \sigma v_2 = v_2, \sigma v_3 = v_1.$$

Ο πίνακας $[\sigma]_{\mathcal{B}}$ της αντίστοιχης γραμμικής απεικόνισης

$$V \rightarrow V, v \mapsto \sigma v$$

ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ είναι

$$[\sigma]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για $\tau = (123)$, έχουμε

$$\tau v_1 = v_2, \tau v_2 = v_3, \tau v_3 = v_1$$

και

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. FG -πρότυπα και αλλαγή βάσης

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι αν έχουμε ένα FG -πρότυπο V , τότε για κάθε βάση $\mathcal{B}$ του V έχουμε μια αναπαράσταση της G . Θα δούμε εδώ πώς συνδέονται οι προκύπτουσες αναπαραστάσεις της G καθώς αλλάζει η βάση $\mathcal{B}$.

Θεώρημα 2.8. Έστω V ένα FG -πρότυπο, $\mathcal{B}$ μια διατεταγμένη βάση του V και

$$\rho : G \rightarrow GL_n(F), g \mapsto [g]_{\mathcal{B}}$$

η αντίστοιχη αναπαράσταση. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(1) Αν $\mathcal{B}'$ είναι διατεταγμένη βάση του V και

$$\rho' : G \rightarrow GL_n(F), g \mapsto [g]_{\mathcal{B}'}$$

η αντίστοιχη αναπαράσταση, τότε οι ρ, ρ' είναι ισοδύναμες.

(2) Αν ρ' είναι αναπαράσταση της G που είναι ισοδύναμη της ρ , τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}'$ του V έτσι ώστε η ρ' δίνεται από

$$\rho' : G \rightarrow GL_n(F), g \mapsto [g]_{\mathcal{B}'}$$

Απόδειξη. (1) Θεωρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης

$$T = [1_G]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

από τη $\mathcal{B}'$ στη $\mathcal{B}$. Θυμίζουμε ότι αν $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$, τότε η j στήλη του T είναι

$$\begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix},$$

όπου $b'_j = \sum_i t_{ij} b_i$, $j = 1, \dots, n$. Ξέρουμε από ΓΑ τη σχέση

$$(2.2) \quad [g]_{\mathcal{B}'} = [1_G]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} [g]_{\mathcal{B}} [1_G]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

δηλαδή

$$[g]_{\mathcal{B}'} = T^{-1} [g]_{\mathcal{B}} T.$$

Συνεπώς για κάθε $g \in G$ έχουμε

$$\rho'(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

που σημαίνει ότι οι ρ, ρ' είναι ισοδύναμες.

(2) Έστω ότι υπάρχει αντιστρέψιμος T με $\rho'(g) = T^{-1}\rho(g)T$ για κάθε $g \in G$. Ξέρουμε από τη ΓΑ ότι, επειδή ο T είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει βάση $\mathcal{B}'$ του V με $T = [1_G]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\rho'(g) &= [1_G]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} [g]_{\mathcal{B}} [1_G]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \\ &= [g]_{\mathcal{B}'}\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (2.2). $\square$

2.4. Ανάγωγα FG -πρότυπα

Ορισμός 2.9. Έστω V ένα FG -πρότυπο. Ένας υπόχωρος W του V λέγεται FG -υποπρότυπο αν $gw \in W$ για κάθε $g \in G$ και $w \in W$.

Είναι σαφές ότι κάθε FG -υποπρότυπο W ενός FG -πρότυπου V είναι FG -πρότυπο. Η δράση της G στο W δίνεται από τον περιορισμό της δράσης της G στο υποσύνολο W του V .

Παραδείγματα 2.10.

- (1) Αν V είναι FG -πρότυπο, τότε το ίδιο το V και ο μηδενικός χώρος $\{0\}$ είναι FG -υποπρότυπα του V .
- (2) Ας θεωρήσουμε το πρότυπο μετάθεσης της συμμετρικής ομάδας S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 2.7. Έχουμε διανυσματικό χώρο V διάστασης n , μία βάση του $\{v_1, \dots, v_n\}$ και τη δράση της S_n στο V που ορίζεται από

$$\sigma v_i = v_{\sigma(i)},$$

όπου $\sigma \in S_n$ και $1 \leq i \leq n$. Έστω U ο υπόχωρος του V που παράγεται από το στοιχείο

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

που είναι το άθροισμα των στοιχείων της βάσης. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\sigma \in S_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma(v_1 + v_2 + \dots + v_n) &= v_{\sigma(1)} + v_{\sigma(2)} + \dots + v_{\sigma(n)} \\ &= v_1 + v_2 + \dots + v_n.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε στοιχείο u του υπόχωρου

$$U = \text{span}\{v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$$

έχουμε $\sigma u = u \in U$. Συνεπώς το U είναι FG -υποπρότυπο του V .

Ο υπόχωρος $W = \text{span}\{v_1 + v_2\}$ του V δεν είναι FG -υποπρότυπο αφού, για παράδειγμα, αν $\sigma = (13)$, τότε $\sigma(v_1 + v_2) = v_3 + v_2 \notin W$.

- (3) Ας θεωρήσουμε το Παράδειγμα 1.5(2). Έχουμε την ομάδα $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Η G δρα στο επίπεδο $V = \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + ac_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Εδώ ο υπόχωρος $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, που είναι η ευθεία $y = x$, δεν είναι FG -υποπρότυπο, όπου $F = \mathbb{R}$, καθώς, για παράδειγμα, το σημείο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δεν ανήκει στο U . Ο μοναδικός γνήσιος μη μηδενικός υπόχωρος του V που είναι FG -υποπρότυπο είναι ο άξονας των x (άσκηση).

Ορισμός 2.11. Έστω V ένα μη μηδενικό FG -πρότυπο. Το V λέγεται **ανάγωγο** αν τα μοναδικά υποπρότυπά του είναι το μηδενικό και το V .

Το κεντρικό ερώτημα της θεωρίας αναπαραστάσεων ομάδων είναι

Ερώτημα 2.12. Δοθείσας μιας G , να ταξινομηθούν τα ανάγωγα FG -πρότυπα. Πόσα είναι, ποιες είναι οι διαστάσεις τους;

Θα δούμε στο μάθημα ότι για G πεπερασμένη και $F = \mathbb{C}$ έχουμε ικανοποιητικές απαντήσεις.

Αναφέρουμε ότι ένα από τα σημαντικά άλυστα προβλήματα της περιοχής, επιπέδου Fields Medal¹ ή Abel Prize², που είναι ιδιαίτερα ενεργό, είναι ο προσδιορισμός των διαστάσεων των αναγώγων FG -πρότυπων όταν F είναι θετικής χαρακτηριστικής και G είναι η συμμετρική ομάδα S_n .

Παραδείγματα 2.13.

- (1) Αν V είναι FG -πρότυπο, τότε κάθε FG υποπρότυπο U του V με διάσταση $\dim U = 1$ είναι ανάγωγο.
- (2) Για κάθε $n \geq 2$, το πρότυπο μετάθεσης της S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 2.10(2) δεν είναι ανάγωγο καθώς διαθέτει γνήσιο μη μηδενικό υποπρότυπο.

Παρατήρηση. Αν V είναι FG -πρότυπο και U είναι FG -υποπρότυπο του V , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε μια βάση $\mathcal{B}_U$ και να την επεκτείνουμε σε βάση $\mathcal{B}$ του V . Τότε για κάθε $g \in G$, ο πίνακας $[g]_{\mathcal{B}}$ έχει τη μορφή

$$[g]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} X_g & Y_g \\ \hline 0 & Z_g \end{array} \right),$$

όπου ο πίνακας X_g είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνιση

$$U \rightarrow U, u \mapsto gu,$$

η οποία είναι ο περιορισμός της $V \rightarrow V, v \mapsto gv$ στο U . Ο X_g είναι $m \times m$, $m = \dim U$.

Παράδειγμα 2.14. Καθώς οι αδυναμίες μας είναι σταθερές, ας θεωρήσουμε ξανά το πρότυπο μετάθεσης της συμμετρικής ομάδας S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 2.10(2). Έστω $n = 3$. Έχουμε

$$V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \text{ και } U = \text{span}\{v_1 + v_2 + v_3\}.$$

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/FieldsMedal>

²<https://en.wikipedia.org/wiki/AbelPrize>

Ξέρουμε ότι ο U είναι S_3 -αναλλοίωτος υπόχωρος του V . Θεωρούμε τη βάση $\{v_1 + v_2 + v_3\}$ του U και την ακόλουθη επέκτασή της σε βάση του V

$$\mathcal{B} = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2, v_3\}.$$

Για $\sigma = (12)$ έχουμε

$$[\sigma]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

και για $\tau = (123)$ έχουμε

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Ορισμός 2.15. Μια αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_n(F)$ λέγεται **ανάγωγη** αν το αντίστοιχο FG πρότυπο F^n είναι ανάγωγο.

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι μια αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_n(F)$ δεν είναι ανάγωγη αν και μόνο αν είναι ισοδύναμη με αναπαράσταση της μορφής της παραπάνω Παρατήρησης, όπου $1 \leq m < \dim V$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

- Έστω $\rho, \rho', \rho'' : G \rightarrow GL_n(F)$ αναπαραστάσεις της G του ίδιου βαθμού. Δείξτε τα ακόλουθα.
 - Η ρ είναι ισοδύναμη με τη ρ .
 - Αν η ρ είναι ισοδύναμη με τη ρ' , τότε η ρ' είναι ισοδύναμη με τη ρ .
 - Αν η ρ είναι ισοδύναμη με τη ρ' και η ρ' είναι ισοδύναμη με τη ρ'' , τότε η ρ είναι ισοδύναμη με τη ρ'' .
- Θεωρούμε την κυκλική ομάδα $G = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ τάξης 3 και τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Δείξε ότι έχουμε αναπαραστάσεις ρ_A, ρ_B, ρ_C της G που ορίζονται από $\rho_A(a^m) = A^m, \rho_B(a^m) = B^m, \rho_C(a^m) = C^m, (m = 0, 1, 2)$.
 - Ποιες είναι πιστές;
 - Ποιες είναι ανά δύο ισοδύναμες;
 - Αληθεύει ότι κάθε αναπαράσταση της G είναι ισοδύναμη με μία από τις ρ_A, ρ_B, ρ_C ;
- Θεωρούμε την ομάδα $G = C_4 \times C_2 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$ και τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Δείξτε ότι υπάρχει αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $\rho(a) = A, \rho(b) = B$. Είναι η ρ πιστή;

ii) Θεωρούμε τους πίνακες

$$A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Δείξτε ότι υπάρχει αναπαράσταση $\rho' : G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $\rho'(a) = A'$, $\rho'(b) = B'$. Είναι η ρ' πιστή;

iv) Δείξτε ότι οι πίνακες A, A' είναι όμοιοι και ομοίως οι B, B' είναι όμοιοι.

v) Αληθεύει ότι οι αναπαραστάσεις ρ, ρ' είναι ισοδύναμες;

4. Δείξτε ότι αν ρ είναι αναπαράσταση βαθμού 1, τότε η ομάδα $G/\ker(\rho)$ είναι αβελιανή.

5. Μια ομάδα λέγεται απλή αν δεν έχει μη τετριμμένη γνήσια υποομάδα. Έστω ρ αναπαράσταση πεπερασμένης ομάδας G . Δείξτε ότι αν υπάρχει $g \in G$ με $\det(\rho(g)) = -1$, τότε η G δεν είναι απλή.

6. Ας θεωρήσουμε το πρότυπο μετάθεσης της συμμετρικής ομάδας S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 2.7. Έστω $n = 3$ και $W = \text{span}\{v_1 - v_2, v_2 - v_3\}$. Δείξτε ότι το W είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V . Στη συνέχεια δείξτε ότι είναι ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο.

7. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V με βάση $\mathcal{B} = \{v_{i,j} : 1 \leq i, j \leq 3\}$ και τη δράση της S_3 στο $\mathcal{B}$ δίνεται από $\sigma v_{i,j} = v_{\sigma(i), \sigma(j)}$.

i) Δείξτε ότι ο υπόχωρος $U = \text{span}\{v_{1,1}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$ του V είναι FG υποπρότυπο του V που δεν είναι ανάγωγο.

ii) Δείξτε ότι ο υπόχωρος $W = \text{span}\{v_{i,j} : i \neq j\}$ του V είναι FG υποπρότυπο του V που δεν είναι ανάγωγο.

iii) Βρείτε ανάγωγο FG -υποπρότυπο του W που είναι ανάγωγο και διάφορο του τετριμμένου προτύπου.

8. Έστω G ομάδα που παράγεται από στοιχεία a, b και έστω ότι υπάρχει αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ που ορίζεται από

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $V = \mathbb{C}^3$ το αντίστοιχο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και $\{e_1, e_2, e_3\}$ η συνήθης βάση του V . Δείξτε ότι ο υπόχωρος $U = \text{span}\{e_2, e_3\}$ είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V και εξετάστε αν είναι ανάγωγο.

Άλγεβρα ομάδας, ομομορφισμοί FG -προτύπων, ευθέα αθροίσματα

Στο κεφάλαιο αυτό συνεχίζουμε την εισαγωγή βασικών εννοιών.

Βασικά σημεία

- Άλγεβρα FG
 - Το κανονικό FG -πρότυπο
 - Ομομορφισμοί FG -προτύπων
 - Ευθέα αθροίσματα FG -προτύπων
-

3.1. Άλγεβρα ομάδας

Έστω F σώμα. Σε κάθε πεπερασμένη ομάδα G θα αντιστοιχίσουμε ένα F -διανυσματικό χώρο που είναι και δακτύλιος, η λεγόμενη *άλγεβρα* της G . Ο πολλαπλασιασμός θα προκύψει από γραμμική επέκταση του πολλαπλασιασμού της G . Η θεωρία αναπαραστάσεων της G ανάγεται ουσιαστικά στη μελέτη της άλγεβρας της G .

Έστω ότι η G είναι πεπερασμένη ομάδα $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Θεωρούμε F -διανυσματικό χώρο, που συμβολίζουμε με FG , που διαθέτει βάση σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία της G . Θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τα στοιχεία της G και τα αντίστοιχα στοιχεία βάσης του FG . Άρα κάθε στοιχείο του FG γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n,$$

όπου $\lambda_i \in F$. Η πρόσθεση ορίζεται από

$$(\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n) + (\mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n) = (\lambda_1 + \mu_1)g_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)g_n,$$

όπου $\lambda_i, \mu_i \in F$, και ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός από

$$\lambda(\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n) = (\lambda \lambda_1)g_1 + \dots + (\lambda \lambda_n)g_n,$$

όπου $\lambda, \lambda_i \in F$.

Ορίζουμε το γινόμενο δύο στοιχείων του FG

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh).$$

Προσοχή, τα στοιχεία gh στο δεξί μέλος δεν είναι αναγκαστικά διακεκριμένα. Σταθεροποιώντας ένα $t = gh$, βλέπουμε ότι ο συντελεστής του t στο δεξί μέλος είναι $\sum (\lambda_g \mu_h)$, όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα ζεύγη $(g, h) \in G \times G$ με $gh = t$. Επειδή $gh = t \Leftrightarrow h = g^{-1}t$, έχουμε

$$\sum (\lambda_g \mu_h) = \sum_{g \in G} (\lambda_g \mu_{g^{-1}t}).$$

Άρα για το γινόμενο έχουμε

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) = \sum_{t \in G} \sum_{g \in G} (\lambda_g \mu_{g^{-1}t}) t.$$

Για παράδειγμα αν

$$G = S_3 = \{1_G, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

τότε

$$\begin{aligned} & (1_G - (12))(21_G + (12) - 3(123)) \\ &= 21_G + (12) - 3(123) - 2(12) - (12)(12) + 3(12)(123) \\ &= 21_G + (12) - 3(123) - 2(12) - 1_G + 3(23) \\ &= 1_G - (12) + 3(23) - 3(123). \end{aligned}$$

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι ο διανυσματικός χώρος FG με τον παραπάνω πολλαπλασιασμό γίνεται δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το 1_G . Επιπλέον, για κάθε $r, s \in FG$ και $\lambda \in F$ εύκολα επαληθεύεται ότι

$$(\lambda r)s = r(\lambda s) = \lambda(rs).$$

Ο F -διανυσματικός χώρος FG με την παραπάνω δομή δακτυλίου καλείται η **άλγεβρα της ομάδας**.

Παρατηρήσεις. (1) Υπάρχει πιο γενική αλγεβρική δομή που λέγεται *άλγεβρα*, παράδειγμα της οποίας είναι η άλγεβρα ομάδας FG . Βλ. για παράδειγμα [10, σελίδα 4]. Στις σημειώσεις αυτές δεν θα μας απασχολήσουν άλλες άλγεβρες πλην της FG .
 (2) Στην άλγεβρα FG πεπερασμένης ομάδας τάξης $n > 1$ υπάρχουν μηδενισμένοι. Για παράδειγμα, επειδή $g^n = 1_G$, έχουμε

$$(1_G - g)(1_G + g + \cdots + g^{n-1}) = (1_G + g + \cdots + g^{n-1})(1_G - g) = 1_G - g^n = 0.$$

3.2. Το κανονικό FG -πρότυπο

Η ομάδα G δρα στο διανυσματικό χώρο FG με τον πολλαπλασιασμό του δακτυλίου FG , δηλαδή

$$g \left(\sum_{h \in G} \lambda_h h \right) = \sum_{h \in G} \lambda_h (gh).$$

Οι ιδιότητες του Ορισμού 2.6 ικανοποιούνται, οπότε το FG καθίσταται FG -πρότυπο. Το λέμε το **κανονικό FG -πρότυπο**.

Έστω $\mathcal{B}$ η φυσική βάση του FG . Η αντίστοιχη αναπαράσταση της G , $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$, $g \mapsto [\rho]_g$, καλείται η **κανονική αναπαράσταση** της G .

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι το κανονικό FG -πρότυπο έχει διάσταση ίση με την τάξη της G . Επίσης, είναι πιστό. Πράγματι, αν $g \in G$ είναι τέτοιο ώστε $gv = v$ για κάθε $v \in FG$, τότε ειδικά έχουμε $g1_G = 1_G$, οπότε $g = 1_G$.

Στη συνέχεια θα δούμε πως επεκτείνεται η δράση της G επί FG -προτύπου V

$$G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto gv,$$

σε δράση της άλγεβρας FG επί του V . Θα `επεκτείνουμε γραμμικά ` σύμφωνα με τον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.1. Έστω V ένα FG -πρότυπο. Ορίζουμε απεικόνιση

$$FG \times V \rightarrow V, (r, v) \mapsto rv,$$

όπου για $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g$

$$rv = \sum_{g \in G} \lambda_g (gv).$$

Για παράδειγμα, αν V είναι το πρότυπο μετάθεσης της $G = S_3$ και $r = 1_G - 2(12) + 4(132)$ και $v = v_2$, τότε

$$rv = 1_G v_2 - 2(12)v_2 + 4(132)v_2 = v_2 - 2v_1 + 4v_1 = v_2 + 2v_1.$$

Οι βασικές ιδιότητες της δράσης της άλγεβρας FG στο V είναι οι ακόλουθες.

Πρόταση 3.2. Έστω V ένα FG -πρότυπο, $u, v \in V$, $\lambda \in F$ και $r, s \in FG$. Τότε ισχύουν τα εξής.

- (1) $rv \in V$.
- (2) $r(sv) = (rs)v$.
- (3) $1_G v = v$.
- (4) $r(\lambda v) = \lambda(rv) = (\lambda r)v$.
- (5) $r(u + v) = ru + rv$.
- (6) $(r + s)v = rv + sv$.
- (7) $0_F v = r0_V = 0_V$.

Οι ιδιότητες αυτές, εκτός από τις (4) και (7) θυμίζουν τον ορισμό διανυσματικού χώρου (ή πιο γενικά προτύπου πάνω από δακτύλιο αν έχετε δει.)

Απόδειξη. Ας δούμε ενδεικτικά την (6). Να συμπληρωθεί. □

3.3. Ομομορφισμοί FG -προτύπων

Ορισμός 3.3. Έστω V, W δύο FG -πρότυπα. Μια απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ θα καλείται **FG -ομομορφισμός** (ή **FG -γραμμική**) αν

- (1) είναι F -γραμμική, και
- (2) ισχύει $f(gv) = gf(v)$ για κάθε $g \in G$, $v \in V$.

Αν $f : V \rightarrow W$ είναι FG -ομομορφισμός και η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε η ιδιότητα (2) ισχύει πιο γενικά, δηλαδή

$$f(rv) = rf(v)$$

για κάθε $r \in FG$, $v \in V$. Πράγματι, γράφοντας $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(rv) &= f\left(\sum_{g \in G} \lambda_g gv\right) \\ &= \sum_{g \in G} \lambda_g f(gv) \\ &= \sum_{g \in G} \lambda_g gf(v) \\ &= rf(v). \end{aligned}$$

Ο πυρήνας και η εικόνα ομομορφισμοί FG -προτύπων $f : V \rightarrow W$ είναι FG -υποπρότυπα των V και W αντίστοιχα. Πράγματι, ξέρουμε ότι ο πυρήνας $\ker f$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V . Επιπλέον είναι G -αναλλοίωτος καθώς για κάθε $g \in G$ και $w \in \ker f$ έχουμε

$$f(gw) = gf(w) = g0_W = 0_W.$$

Η απόδειξη για την εικόνα $\operatorname{Im} f$ είναι αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 3.4. Ας θεωρήσουμε ξανά το πρότυπο μετάθεσης της S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 2.7. Έχουμε διανυσματικό χώρο V διάστασης n , μία βάση του

$\{v_1, \dots, v_n\}$ και τη δράση της S_n στο V που ορίζεται από $\sigma v_i = v_{\sigma(i)}$. Έστω U ο υπόχωρος του V που παράγεται από το

$$u = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Ξέρουμε ότι $\sigma u = u$ για κάθε $\sigma \in G$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f : V \rightarrow U, \sum_i \lambda_i v_i \rightarrow (\sum_i \lambda_i)u.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\sigma \in G$ έχουμε

$$f(\sigma(\sum_i \lambda_i v_i)) = \sigma f(\sum_i \lambda_i v_i).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} f(\sigma(\sum_i \lambda_i v_i)) &= f(\sum_i \lambda_i v_{\sigma(i)}) \\ &= (\sum_i \lambda_i)u \\ &= (\sum_i \lambda_i)\sigma u \\ &= \sigma(\sum_i \lambda_i)u \\ &= \sigma f(\sum_i \lambda_i v_i). \end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός FG -προτύπων και οι χώροι $\ker f$ και $\text{Im} f$ είναι FG -πρότυπα. Παρατηρούμε ότι

$$\text{Im} f = U \text{ και } \ker f = \{\sum_i \lambda_i v_i : \sum_i \lambda_i = 0\}.$$

Ισόμορφα FG -πρότυπα

Τα Μαθηματικά είναι η τέχνη να αποδίδεις την ίδια ονομασία σε διαφορετικά πράγματα.

Μια απεικόνιση FG -προτύπων $f : V \rightarrow U$ λέγεται **ισομορφισμός** FG -προτύπων αν είναι ομομορφισμός FG -προτύπων, 1-1 και επί. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι τα V, U είναι **ισόμορφα** FG -πρότυπα και θα γράφουμε $V \simeq U$.

Για παράδειγμα, αν V είναι FG -πρότυπο και λ μη μηδενικό στοιχείο του σώματος F , τότε η απεικόνιση $V \rightarrow V, v \mapsto \lambda v$ είναι ισομορφισμός FG -προτύπων.

Πρόταση 3.5. Έστω $f : V \rightarrow U$ και $h : U \rightarrow W$ ομομορφισμοί FG -προτύπων.

- (1) Αν ο f είναι ισομορφισμός FG -προτύπων, τότε η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : V \rightarrow U$ της f είναι ισομορφισμός FG -προτύπων.
- (2) Η σύνθεση $h \circ f : V \rightarrow W$ είναι ομομορφισμός FG -προτύπων. Ειδικά, αν οι f και h είναι ισομορφισμοί, τότε ο $h \circ f$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. (1) Από ΓΑ ξέρουμε ότι η απεικόνιση f^{-1} είναι γραμμική. Έστω $g \in G$ και $u \in U$. Έχουμε

$$f(g(f^{-1}(u))) = gff^{-1}(u) = gu \Rightarrow g(f^{-1}(u)) = f^{-1}(gu).$$

(2) Άσκηση. □

Όπως θα ανέμενε κανείς, ισόμορφα FG -πρότυπα έχουν κοινές ιδιότητες, μερικές από τις οποίες περιγράφονται στην άσκηση 4. Έχουμε την τάση να θεωρούμε ισόμορφα FG -πρότυπα ως 'ίδια'.

3.4. Ευθέα αθροίσματα FG -προτύπων

Υπενθυμίσεις. Ας θυμηθούμε από τη ΓΑ τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ευθέος αθροίσματος υποχώρων. Έστω V ένας F -διανυσματικός χώρος και $U_1, \dots, U_m$ υποχώροι του V .

Πρόταση 3.6. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

- (1) Κάθε $v \in V$ γράφεται μοναδικά ως $v = u_1 + \dots + u_m$, όπου $u_i \in U_i$.
- (2) $V = U_1 + \dots + U_m$ και για κάθε i ισχύει $V_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U}_i + \dots + U_m) = \{0\}$, όπου $\hat{U}_i$ σημαίνει ότι ο όρος U_i παραλείπεται.

Όταν ισχύουν οι ιδιότητες της προηγούμενης πρότασης θα λέμε ότι το V είναι το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $U_1, \dots, U_m$ και θα γράφουμε $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$. Ξέρουμε ότι αν $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ και για κάθε i το B_i είναι βάση του U_i , τότε η ένωση $B_1 \cup \dots \cup B_m$ είναι βάση του V .

Παρατήρηση. Ας υποθέσουμε εδώ ότι $V = U_1 \oplus U_2$, όπου τώρα το V είναι FG -πρότυπο και τα U_1, U_2 είναι FG -υποπρότυπα του V . Έστω B_i βάση του U_i και $B = B_1 \cup B_2$. Τότε για κάθε $g \in G$ ο πίνακας $[g]_B$ της γραμμικής απεικόνισης

$$V \rightarrow V, v \mapsto gv,$$

έχει τη μορφή

$$[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{B_2} \end{array} \right).$$

Καλό είναι να συγκριθεί το παραπάνω με την παρατήρηση πριν το Παράδειγμα 2.14.

Ευθέα αθροίσματα και προβολές. Θυμίζουμε ότι αν V είναι διανυσματικός χώρος και $\pi : V \rightarrow V$ ενδομορφισμός που ικανοποιεί $\pi^2 = \pi$, θα λέμε ότι ο π είναι **προβολή**.

Αν τώρα το V είναι ευθύ άθροισμα υποχώρων, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, τότε για κάθε i έχουμε την προβολή $\pi_i : V \rightarrow U_i$, που στέλνει το $v_1 + \dots + v_m$, όπου για κάθε i είναι $v_j \in U_j$, στο v_i . Αν επιπλέον το V είναι FG -πρότυπο και τα U_i είναι FG -υποπρότυπα, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι προβολές $\pi_i : V \rightarrow U_i$ είναι ομομορφισμοί FG -προτύπων.

Στην αντίθετη κατεύθυνση, έστω ότι το V είναι διανυσματικός χώρος και $\pi : V \rightarrow V$ είναι προβολή. Τότε το V διασπάται σε ευθύ άθροισμα του πυρήνα και της εικόνας της π ,

$$(3.1) \quad V = \ker \pi \oplus \operatorname{Im} \pi.$$

Πράγματι, αν $v \in \ker \pi \cap \text{Im} \pi$, τότε $\pi(v) = 0$ και $v = \pi(u)$ για κάποιο $u \in V$. Άρα

$$0 = \pi(v) = \pi^2(u) = \pi(u) = v,$$

οπότε έχουμε $\ker \pi \cap \text{Im} \pi = \{0\}$, που είναι η δεύτερη συνθήκη στο (2) της Πρότασης 3.6. Επίσης, αν $v \in V$, τότε γράφοντας

$$v = v - \pi(v) + \pi(v)$$

παρατηρούμε ότι $v - \pi(v) \in \ker \pi$ και $\pi(v) \in \text{Im} \pi$. Πράγματι, η δεύτερη σχέση είναι σαφής, ενώ για την απόδειξη της πρώτης έχουμε

$$\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi^2(v) = 0.$$

Άρα $V = \ker \pi + \text{Im} \pi$ που είναι η πρώτη συνθήκη στο (2) της Πρότασης 3.6. Τελικά έχουμε $V = \ker \pi \oplus \text{Im} \pi$.

Τώρα αν το V είναι FG -πρότυπο και $\pi : V \rightarrow V$ είναι προβολή, τότε θεωρώντας την π σαν γραμμική απεικόνιση, έχουμε το ευθύ άθροισμα (3.1). Εδώ, οι υπόχωροι $\ker \pi, \text{Im} \pi$ είναι FG -υποπρότυπα του V .

Παράδειγμα 3.7. Ας θεωρήσουμε ξανά το πρότυπο μετάθεσης της S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 3.4. Με το συμβολισμό αυτού, ξέρουμε ότι η απεικόνιση

$$\pi : V \rightarrow V, \sum_i \lambda_i v_i \rightarrow \frac{1}{n} \left(\sum_i \lambda_i \right) u$$

είναι ομομορφισμός FG -προτύπων, οι χώροι $\ker \pi$ και $\text{Im} \pi$ είναι FG -πρότυπα, $\text{Im} \pi = \text{span}\{v_1 + \dots + v_n\}$ και $\ker \pi = \{\sum_i \lambda_i v_i : \sum_i \lambda_i = 0\}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι $\pi^2 = \pi$ και επομένως $V = \ker \pi \oplus \text{Im} \pi$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

1. Έστω G πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n . Δείξτε ότι οι δακτύλιοι FG και $F[x]/(x^n - 1)$ είναι ισόμορφοι.
2. Ας θεωρήσουμε το πρότυπο μετάθεσης της συμμετρικής ομάδας S_n που είδαμε στο Παράδειγμα 2.7. Έστω $n = 3$ και $W = \text{span}\{v_1 - v_2, v_2 - v_3\}$. Δείξτε ότι το W είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V . Στη συνέχεια δείξτε ότι είναι ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο.
3. Έστω G πεπερασμένη ομάδα τάξης n και $c = \sum_{g \in G} g \in FG$.
 - i) Δείξτε ότι $cg = gc$ για κάθε $g \in G$ και ότι $cr = rc$ για κάθε $r \in FG$.
 - ii) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα, δείξτε ότι $c^2 = nc$.
 - iii) Υπολογίστε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $FG \rightarrow FG, r \mapsto cr$ ως προς τη φυσική βάση του FG . Με τη βοήθεια αυτού, δείξτε ξανά το προηγούμενο ερώτημα.
4. Αν V, U είναι ισόμορφα FG -πρότυπα, τότε:
 - i) $\dim V = \dim U$.
 - ii) Το V είναι τετριμμένο FG -πρότυπο αν και μόνο αν το U είναι τετριμμένο FG -πρότυπο.
 - iii) Το V είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το U είναι ανάγωγο.

5. Θεωρούμε την κυκλική ομάδα $G = \langle a : a^5 = 1_G \rangle$ και το σώμα $F = \mathbb{Z}_2$. Δείξτε ότι το κανονικό FG -πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα δύο αναγώγων FG -προτύπων.
6. Έστω V ένα $\mathbb{C}G$ πρότυπο. Ορίζουμε το υποπρότυπο των σταθερών σημείων

$$V^G = \{v \in V : gv = v \ \forall g \in G\}$$

και την απεικόνιση

$$\theta : V \rightarrow V, v \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv.$$

- i) Δείξτε ότι το V^G είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V και ότι η θ είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ -προτύπων
- ii) Δείξτε ότι η θ είναι προβολή (δηλαδή $\theta^2 = \theta$) και $\text{Im}\theta = V^G$.
7. Έστω V ένα FG -πρότυπο με την ιδιότητα ότι υπάρχει $v \in V$ έτσι ώστε τα στοιχεία $gv \in V$, καθώς το g διατρέχει το σύνολο G , αποτελούν βάση του V . Δείξτε ότι το V είναι ισόμορφο με το κανονικό FG -πρότυπο.

Θεώρημα του Maschke

Θα δούμε εδώ το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα στη θεωρία αναπαραστάσεων που είναι γνωστό ως Θεώρημα του Maschke.

Βασικά σημεία

- Θεώρημα του Maschke
- Κάθε $\mathbb{C}G$ -πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα αναγωγών.

Στο κεφάλαιο αυτό, F θα είναι το σώμα των πραγματικών ή το σώμα των μιγαδικών και G πεπερασμένη ομάδα.

4.1. Θεώρημα του Maschke

Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα του Maschke). Έστω FG -πρότυπο V και FG -υποπρότυπο U του V . Τότε υπάρχει FG -υποπρότυπο W του V με

$$V = U \oplus W.$$

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις.

1η απόδειξη. Ξέρουμε από τη ΓΑ ότι κάθε βάση $\{u_1, \dots, u_m\}$ του U μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_t\}$ του V . Θέτοντας $W_0 = \text{span}\{w_1, \dots, w_t\}$ έχουμε

$$V = U \oplus W_0.$$

Από την Παράγραφο 3.4 ξέρουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση

$$\varphi : V \rightarrow V$$

που ορίζεται από $\varphi(u + w) = u$, όπου $u \in U, w \in W_0$, η οποία είναι προβολή με $\ker \varphi = W_0$ και $\text{Im} \varphi = U$.

Το ζητούμενο εδώ είναι ότι η φ είναι μόνο F -γραμμική και όχι αναγκαστικά FG -γραμμική. Χρησιμοποιώντας τη φ θα ορίσουμε μια FG -γραμμική απεικόνιση $\theta : V \rightarrow V$ που θα είναι προβολή επί του U .

Ορίζουμε $\theta : V \rightarrow V$,

$$\theta(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(gv).$$

Πρώτα θα δούμε ότι η θ είναι FG γραμμική. Έστω $v \in V, x \in G$. Τότε

$$\begin{aligned} \theta(xv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(g(xv)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi((gx)v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} xh^{-1} \varphi(hv) \\ &= x \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \varphi(hv) \right) \\ &= x\theta(v), \end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι για σταθερό $x \in G$, το gx διατρέχει τα στοιχεία της G καθώς το g διατρέχει τα στοιχεία της G .

Θα δούμε τώρα ότι η θ είναι προβολή, δηλαδή $\theta^2 = \theta$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$(4.1) \quad \theta(u) = u$$

για κάθε $u \in U$. Πράγματι, για κάθε $g \in G$ έχουμε $gu \in U$ και άρα $\varphi(gu) = gu$. Τότε ο ορισμός της θ δίνει $\theta(u) = u$. Τώρα αν $v \in V$, έχουμε $\varphi(gv) \in U$ και επομένως $\theta(v) \in U$. Άρα

$$\theta^2(v) = \theta(\theta(v)) = \theta(v)$$

σύμφωνα με τη σχέση (4.1). Άρα $\theta^2 = \theta$.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι η $\theta : V \rightarrow V$ είναι προβολή και FG -γραμμική. Από τη (4.1) έπεται ότι $\text{Im} \theta = U$. Από (3.1) έχουμε $V = \text{Im} \theta \oplus \ker \theta = U \oplus \ker \theta$ και ο υπόχωρος $\ker \theta$ είναι FG -υποπρότυπο του V . $\square$

Παρατήρηση. Σημειώνουμε ότι η πρώτη απόδειξη ισχύει όχι μόνο για $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ αλλά για οποιοδήποτε σώμα (1) χαρακτηριστικής 0 ή (2) θετικής χαρακτηριστικής p που δεν διαιρεί την τάξη της G (οπότε έχει νόημα το $\frac{1}{|G|}$ στον ορισμό της θ). Με άλλα λόγια, ισχύει για κάθε σώμα F όπου το $|G|$ είναι αντιστρέψιμο.

Παράδειγμα 4.2. Ας εφαρμόσουμε την κατασκευή που είδαμε στην παραπάνω απόδειξη στο αγαπημένο μας παράδειγμα του προτύπου μετάθεσης. Έστω $G = S_3$ και F οποιοδήποτε σώμα που το 6 είναι αντιστρέψιμο. Έστω

$$V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \text{ και } U = \text{span}\{v_1 + v_2 + v_3\}.$$

Με το συμβολισμό της απόδειξης, μια επιλογή W_0 είναι $W_0 = \text{span}\{v_2, v_3\}$. Δηλαδή έχουμε $V = U \oplus W_0$ ως διανυσματικοί χώροι. Η αντίστοιχη προβολή $\varphi : V \rightarrow V$ ορίζεται από

$$\varphi(v_2) = \varphi(v_3) = 0, \quad \varphi(v_1 + v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

Με αυτές τις σχέσεις εύκολα επαληθεύεται ότι ο ορισμός του $\theta : V \rightarrow V$ της απόδειξης δίνει

$$\theta(v_i) = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Επίσης εύκολα επαληθεύεται ότι $W = \text{span}\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$. Η απόδειξη λέει ότι για $W = \ker \theta$ έχουμε ευθύ άθροισμα FG -προτύπων $V = U \oplus W$. Το ίδιο συμπέρασμα είχαμε δει στο Παράδειγμα 3.7 στο οποίο φτάσαμε με ad hoc μέθοδο.

Παράδειγμα 4.3. Ας δούμε εδώ ένα παράδειγμα που δεν αληθεύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Maschke για πεπερασμένη ομάδα G και σώμα θετικής χαρακτηριστικής που διαιρεί την τάξη της G . Έστω p πρώτος, $F = \mathbb{Z}_p$ και $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \right\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Εδώ $G \simeq C_p$. Το $V = \mathbb{Z}_p^2$ είναι FG -πρότυπο με δράση που ορίζεται από το σύννηθες γινόμενο πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}.$$

Ο υπόχωρος U του V που παράγεται από το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι FG -υπόχωρος του V . Όμως δεν υπάρχει FG -υπόχωρος του V με $V = U \oplus W$. Πράγματι, κάθε μονοδιάστατος FG -υπόχωρος του V θα ήταν ιδιόχωρος του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος όμως διαθέτει μοναδικό ιδιόχωρο (οπότε το άθροισμα $U + W$ δεν είναι ευθύ).

Παράδειγμα 4.4. Ας δούμε ένα παράδειγμα που δεν αληθεύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Maschke για άπειρες ομάδες. Έστω $F = \mathbb{C}$ και $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \right\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Εδώ η G είναι η άπειρη κυκλική ομάδα. Το $V = \mathbb{C}^2$ είναι FG -πρότυπο με δράση που ορίζεται από το σύννηθες γινόμενο πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}.$$

Ο υπόχωρος U του V που παράγεται από το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι FG -υπόχωρος του V . Όμως δεν υπάρχει FG -υπόχωρος του V με $V = U \oplus W$. Η δικαιολόγηση είναι παρόμοια με το προηγούμενο παράδειγμα.

Θα δούμε τώρα διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος του Maschke που έχει γεωμετρική χροιά. Αυτή ισχύει μόνο για σώμα θετικής χαρακτηριστικής.

Θυμίζουμε ότι αν V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ και U είναι ένας υπόχωρος του V , τότε έχουμε

$$V = U \oplus U^\perp,$$

όπου

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$$

είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του U στο V .

2η απόδειξη. Έχουμε ένα $\mathbb{C}G$ -πρότυπο V με βάση $v_1, v_2, \dots, v_n$ και ένα $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο U του V . Ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στο V ,

$$\langle \sum_i \lambda_i v_i, \sum_i \mu_i v_i \rangle = \sum_i \lambda_i \bar{\mu}_i.$$

Ορίζουμε ένα δεύτερο εσωτερικό γινόμενο στο V

$$[u, v] = \sum_{x \in G} \langle xu, xv \rangle.$$

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι έχουμε πράγματι εσωτερικά γινόμενα.

(1) Παρατηρούμε ότι $[gu, gv] = [u, v]$ για κάθε $g \in G, u, v \in V$. Πράγματι

$$\begin{aligned} [gu, gv] &= \sum_{x \in G} \langle x(gu), x(gv) \rangle \\ &= \sum_{x \in G} \langle (xg)u, (xg)v \rangle \\ &= \sum_{x \in G} \langle xu, v \rangle \\ &= [u, v]. \end{aligned}$$

(2) Έστω

$$U^\perp = \{v \in V : [v, u] = 0, \forall u \in U\}$$

το ορθογώνιο συμπλήρωμα του U ως προς το δεύτερο εσωτερικό γινόμενο. Ξέρουμε ότι είναι υπόχωρος του V και $V = U \oplus U^\perp$. Για να δείξουμε το Θεώρημα του Maschke μένει να δείξουμε ότι το $U^\perp$ είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V . Για το σκοπό αυτό, έστω $v \in U^\perp$ και $u \in U$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε

$$\begin{aligned} [gv, u] &= [gv, gg^{-1}u] \\ &= [v, g^{-1}u] \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $g^{-1}u \in U$. □

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος Maschke είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.5. Κάθε FG -πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων FG -προτύπων.

Απόδειξη. Επαγωγή στη διάσταση του FG -προτύπου. □

Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα, στη μελέτη αναπαραστάσεων της G ένα από τα πρώτα βήματα είναι η μελέτη αναγωγών αναπαραστάσεων της G .

Το ακόλουθο πόρισμα λέει ότι για κάθε FG -υποπρότυπο ενός FG -προτύπου, έχουμε αντίστοιχη προβολή που είναι ομομορφισμός FG -προτύπων.

Πόρισμα 4.6. Αν V είναι FG -πρότυπο και U είναι FG -υποπρότυπο του V , τότε υπάρχει επιμορφισμός FG -προτύπων $V \rightarrow U$ που ο περιορισμός στο U είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Maschke ξέρουμε ότι υπάρχει FG -υποπρότυπο W του V με $V = U \oplus W$. Κάθε $v \in V$ γράφεται μοναδικά ως $v = u + w$, όπου $u \in U, w \in W$. Η απεικόνιση $V \rightarrow U, v \mapsto u$ είναι επιμορφισμός FG -προτύπων που ο περιορισμός στο U είναι η ταυτοτική απεικόνιση. $\square$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

1. Έστω $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1_G \rangle$ και U ο υπόχωρος του $\mathbb{C}G$ που παράγεται από το $1 + \omega a + \omega^2 a^2$, όπου $\omega \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^2 + x + 1$. Δείξτε ότι το U είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του $\mathbb{C}G$ και βρείτε μια βάση ενός $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπου του $\mathbb{C}G$, έστω W , με $\mathbb{C}G = U \oplus W$. Είναι το W ανάγωγο;

Λήμμα του Schur

Algebra is like sheet music. The important thing isn't can you read music, it's can you hear it. Can you hear the music, Robert?
Από την ταινία Oppenheimer (2023).

Θα δούμε εδώ το λεγόμενο Λήμμα του Schur που, ενώ είναι απλό στη διατύπωση και απόδειξη, έχει θεμελιώδη σημασία στη θεωρία αναπαραστάσεων. Ως εφαρμογή θα ταξινομήσουμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.

Βασικά σημεία

- Λήμμα του Schur
- Αναπαραστάσεις πεπερασμένων αβελιανών ομάδων
- Το κέντρο της άλγεβρας ομάδας

Στο κεφάλαιο αυτό και σε όλα τα επόμενα, το υποκείμενο σώμα F θα είναι το σώμα των μιγαδικών και G πεπερασμένη ομάδα.

5.1. Λήμμα του Schur

Λήμμα 5.1 (Λήμμα του Schur). Έστω ότι V και W είναι ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -πρότυπα.

- (1) Κάθε $\mathbb{C}G$ -ομομορφισμός $V \rightarrow W$ είναι ισομορφισμός ή ο μηδενικός.
- (2) Αν $\theta : V \rightarrow V$ είναι $\mathbb{C}G$ -ομομορφισμός, τότε ο θ είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού ομομορφισμού 1_V , δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\theta(v) = \lambda v$ για κάθε $v \in V$.

Απόδειξη. (1) Έστω $\theta : V \rightarrow V$ μη μηδενικός $\mathbb{C}G$ -ομομορφισμός. Ο πυρήνας $\ker \theta$ είναι γνήσιο $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V . Επειδή το V είναι ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο, έχουμε ότι $\ker \theta = \{0\}$. Άρα ο ομομορφισμός θ είναι 1-1. Ανάλογο επιχείρημα με την εικόνα $\text{Im} \theta$ στη θέση του πυρήνα δείχνει ότι ο θ είναι επί. Άρα είναι ισομορφισμός.

(2) Επειδή το σώμα $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό, η γραμμική απεικόνιση $\theta : V \rightarrow V$ έχει ιδιοτιμή, έστω λ . Έχουμε ότι ο υπόχωρος $\ker(\theta - \lambda 1_V)$ του V είναι μη τετριμμένος. Επειδή είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V και το V είναι ανάγωγο, συμπεραίνουμε ότι $\ker(\theta - \lambda 1_V) = V$. Άρα $\theta(v) = \lambda v$ για κάθε $v \in V$. $\square$

Στο (2) του Λήμματος του Schur ισχύει το αντίστροφο.

Λήμμα 5.2. *Αν V είναι μη μηδενικό $\mathbb{C}G$ -πρότυπο τέτοιο ώστε κάθε $\mathbb{C}G$ -ενδομορφισμός του V είναι αριθμητικό πολλαπλάσιο της ταυτοτικής απεικόνισης, τότε το V είναι ανάγωγο.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει μη μηδενικό γνήσιο $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V , έστω U , τότε υπάρχει $\mathbb{C}G$ -επιμορφισμός $V \rightarrow U$ που ο περιορισμός στο U είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Τότε η σύνθεση

$$V \rightarrow U \hookrightarrow V,$$

όπου η απεικόνιση $U \hookrightarrow V$ είναι η φυσική ένθεση $u \mapsto u$, είναι πολλαπλάσιο της ταυτοτικής απεικόνισης. Επειδή το U είναι μη μηδενικό, βλέπουμε ότι η σύνθεση είναι η ταυτοτική απεικόνιση από την υπόθεση.

Από την άλλη μεριά, ο U είναι γνήσιος υπόχωρος του V και επομένως η γραμμική απεικόνιση $V \rightarrow U$ έχει μη μηδενικό πυρήνα αφού η διάσταση του V είναι πεπερασμένη. Οπότε και η σύνθεση $V \rightarrow U \hookrightarrow V$ έχει μη μηδενικό πυρήνα. Αυτό είναι άτοπο. $\square$

5.2. Το κέντρο της άλγεβρας $\mathbb{C}G$

Θα δούμε εδώ μια χρήσιμη συνέπεια του λήμματος του Schur για τη δράση του κέντρου της άλγεβρας $\mathbb{C}G$ επί αναγώγων $\mathbb{C}G$ -προτύπων.

Ορισμός 5.3. Το κέντρο της άλγεβρας $\mathbb{C}G$ ορίζεται ως

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz \ \forall r \in \mathbb{C}G\}.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι πρόκειται για υπόχωρο του $\mathbb{C}G$ και ότι είναι και δακτύλιος του $\mathbb{C}G$. Θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια ότι το $Z(\mathbb{C}G)$ παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία αναπαραστάσεων της G .

Παραδείγματα 5.4.

- (1) Η G είναι αβελιανή αν και μόνο αν ο δακτύλιος $Z(\mathbb{C}G)$ είναι μεταθετικός.
 (2) Εύκολα επαληθεύεται ότι $\sum_{g \in G} g \in Z(\mathbb{C}G)$. Πιο γενικά έχουμε το εξής. Έστω H κανονική υποομάδα της G . Τότε $\sum_{h \in H} h \in Z(\mathbb{C}G)$. Πράγματι, αν $g \in G$, τότε $gH = Hg$. Άρα

$$g\left(\sum_{h \in H} h\right) = \sum_{h \in H} gh = \sum_{h \in H} hg = \left(\sum_{h \in H} h\right)g.$$

Άρα $r\left(\sum_{h \in H} h\right) = \left(\sum_{h \in H} h\right)r$ για κάθε $r \in Z(\mathbb{C}G)$. Για παράδειγμα, αν $G = S_3$, τότε

$$1, 1 + (123) + (132), 1 + (12) + (13) + (23) + (123) + (132) \in Z(\mathbb{C}S_3).$$

Πρόταση 5.5. Έστω V ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $zv = \lambda v$ για κάθε $v \in V$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση

$$\theta : V \rightarrow V, v \mapsto zv$$

είναι γραμμική. Επειδή $z \in Z(\mathbb{C}G)$, έχουμε

$$\theta(rv) = zrv = rzv = r\theta(v)$$

για κάθε $r \in \mathbb{C}G$. Δηλαδή η θ είναι $\mathbb{C}G$ -γραμμική. Καθώς το V είναι ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο, το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα του Schur. $\square$

5.3. Αναπαραστάσεις πεπερασμένων αβελιανή ομάδων

Θα ταξινομήσουμε εδώ τα ανάγωγα $\mathbb{C}G$ πρότυπα όταν η πεπερασμένη ομάδα G είναι αβελιανή. Το πρώτο αποτέλεσμα μας λέει ότι κάθε τέτοιο πρότυπο έχει διάσταση 1.

Πρόταση 5.6. Αν η πεπερασμένη ομάδα G είναι αβελιανή, τότε κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ πρότυπο έχει διάσταση 1.

Απόδειξη. Έστω V ανάγωγο $\mathbb{C}G$ και $v \in V$ μη μηδενικό στοιχείο. Επειδή η G είναι αβελιανή έχουμε $Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}G$. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι το $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V που παράγεται από το v ισούται με το $\text{span}(v)$, το οποίο έχει διάσταση 1. Επειδή το V είναι ανάγωγο έχουμε $V = \text{span}(v)$. $\square$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι για μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα G τάξης n ορίζονται n ανάγωγες αναπαραστάσεις της G που είναι ανά δύο μη ισοδύναμες. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε ένα τμήμα από το λεγόμενο θεμελιώδες θεώρημα πεπερασμένων αβελιανών ομάδων, συγκεκριμένα:

Θεώρημα 5.7. Κάθε αβελιανή ομάδα G τάξης n είναι ισόμορφη με ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων

$$(5.1) \quad G \simeq C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_r}.$$

Για την απόδειξη, βλ. [7, Παράγραφο 11.4].

Από την σχέση (5.1), έπεται ότι μια παρουσίαση της G είναι

$$G = \langle g_1, g_2, \dots, g_m : g_i^{n_i} = 1_G, g_i g_j = g_j g_i \ \forall i, j \rangle.$$

Έστω $\omega_i \in \mathbb{C}$ με $\omega_i^{n_i} = 1$, $i = 1, \dots, r$. Εύκολα επαληθεύεται ότι η απεικόνιση

$$(5.2) \quad \rho_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r} : G \rightarrow GL_1(\mathbb{C}), g_1^{m_1} g_2^{m_2} \dots g_r^{m_r} \mapsto \omega_1^{m_1} \omega_2^{m_2} \dots \omega_r^{m_r}$$

είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός ομάδων, δηλ. αναπαράσταση της G . Ως βαθμού 1 είναι ανάγωγη. Είναι διακεκριμένες ανά δύο (για τις επιλογές $i = 1, \dots, r$ και $\omega_i^{n_i} = 1$) και επειδή έχουν βαθμό 1, είναι μη ισοδύναμες ανά δύο. Το πλήθος τους είναι ίσο με το γινόμενο $n_1 n_2 \dots n_r = n$.

Αντίστροφα, έστω

$$\rho : G \rightarrow GL_k(\mathbb{C})$$

ανάγωγη αναπαράσταση της G . Θα δείξουμε ότι η ρ είναι της μορφής (5.2). Πράγματι, από την Πρόταση 5.6 έπεται ότι $k = 1$. Από τη σχέση $g_i^{n_i} = 1_G$ έπεται ότι $\rho(g_i)^{n_i} = 1$. Επειδή η απεικόνιση ρ είναι ομομορφισμός, έπεται ότι είναι της μορφής (5.2).

Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

1. Θεωρούμε την ομάδα $G = S_3$, τα στοιχεία της άλγεβρας $\mathbb{C}G$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sum_{\sigma \in G} \sigma, \\ r_2 &= \sum_{\sigma \in G} \text{sign}(\sigma) \sigma, \\ r_3 &= (1 + (12))(1 - (13)) \end{aligned}$$

και τα αντίστοιχα κυκλικά $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπα V_i του κανονικού προτύπου που αυτά παράγουν, δηλαδή $V_i = \{rr_i \in \mathbb{C}G : r \in \mathbb{C}G\}$. Δείξτε ότι τα V_i είναι ανάγωγα και ότι το άθροισμα τους $V_1 + V_2 + V_3$ είναι ευθύ και έχει διάσταση 4. Στη συνέχεια βρείτε $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο V_4 του κανονικού προτύπου ώστε

$$\mathbb{C}G = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4.$$

Είναι σωστό ότι κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο είναι ισόμορφο με ένα από τα V_1, V_2, V_3 ;

2. (Αναπαραστάσεις κυκλικών ομάδων) Έστω n θετικός ακέραιος, $G = \langle g : g^n = 1_G \rangle$ κυκλική ομάδα τάξης n και $E_n = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\}$ το σύνολο των μιγαδικών n -στών ριζών της μονάδας. Για $\zeta \in E_n$ ορίζουμε $v_\zeta \in \mathbb{C}G$,

$$v_\zeta = 1 + \zeta g + \zeta^2 g^2 + \dots + \zeta^{n-1} g^{n-1},$$

και $V_\zeta = \text{span}\{v_\zeta\}$ τον υπόχωρο του $\mathbb{C}G$ που παράγεται από το v_ζ .

- i) Δείξτε ότι το V_ζ είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του $\mathbb{C}G$. Στη συνέχεια δείξτε ότι τα V_ζ , καθώς το ζ διατρέχει το σύνολο E_n , είναι ανά δύο μη ισόμορφα ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπα.
- ii) Δείξτε ότι $\mathbb{C}G = \bigoplus_{\zeta \in E_n} V_\zeta$.
- iii) Υπολογίστε τον πίνακα $[g]_B$ της γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G, r \mapsto gr$ ως προς τη φυσική βάση B του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}G$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $[g]_B$.

- iv) Δώστε μια ερμηνεία του αποτελέσματος του ii) με βάση το iii) και ΓΑ.
 v) Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^2$ ως $\mathbb{C}G$ -πρότυπο με δράση που ορίζεται από

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(γινόμενο πινάκων). Παραστήστε το V ως ευθύ άθροισμα δύο αναγώγων $\mathbb{C}G$ -υποπροτύπων του.

- vi) (Θα δούμε εδώ ότι η Πρόταση 5.6 γενικά δεν αληθεύει για το σώμα $\mathbb{R}$ στη θέση του $\mathbb{C}$.) Έστω $n = 3$. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $W = \mathbb{R}^2$ ως $\mathbb{R}G$ -πρότυπο με δράση που ορίζεται όπως πριν. Δείξτε ότι το W είναι ανάγωγο $\mathbb{R}G$ -πρότυπο.

Η διάσπαση του κανονικού $\mathbb{C}G$ -προτύπου

Από το Θεώρημα του Mascke ξέρουμε ότι το κανονικό $\mathbb{C}G$ -πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων υποπροτύπων του

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s.$$

Θα δούμε εδώ ότι κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο U είναι ισόμορφο με ένα από τα U_i . Επίσης θα δείξουμε το πλήθος των $U_1, U_2, \dots, U_s$ που είναι ισόμορφα με το U ισούται με τη διάσταση του U .

Βασικά σημεία

- Ο χώρος $\mathbb{C}G$ ομομορφισμών και ιδιότητες
- Πολλαπλότητα αναγώγου προτύπου στο κανονικό πρότυπο

6.1. Η διάσπαση του κανονικού $\mathbb{C}G$ -προτύπου

Θα χρειαστούμε δύο λήμματα, που όμως εμφανίζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον.

Λήμμα 6.1. Αν $\theta : V \rightarrow W$ είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ -προτύπων, τότε υπάρχει $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο U του V με

$$U \simeq \text{Im}\theta \text{ και } V = \ker \theta \oplus U.$$

Απόδειξη. Από το Πρόσχημα 4.6, υπάρχει $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο U του V με $V = \ker \theta \oplus U$. Θα δείξουμε ότι $U \simeq \text{Im}\theta$.

Θεωρούμε τον περιορισμό της θ στο U ,

$$\bar{\theta} : U \rightarrow \text{Im}\theta, u \mapsto \theta(u).$$

Είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ -προτύπων. Αν $\bar{\theta}(u) = 0$, για κάποιο $u \in U$, τότε

$$u \in \ker \theta \cap U = \{0\}$$

που σημαίνει ότι ο $\bar{\theta}$ είναι μονομορφισμός. Τέλος ο $\bar{\theta}$ είναι επί, διότι αν $w = \theta(v)$ για κάποιο $v \in V$, τότε $v = v_1 + v_2$ για κάποια $v_1 \in \ker \theta, v_2 \in U$. Άρα

$$w = \theta(v) = \theta(v_1) + \theta(v_2) = \theta(v_2) = \bar{\theta}(v_2).$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα παρέχει ένα είδος μοναδικότητας στην παράσταση $\mathbb{C}G$ -προτύπου ως άθροισμα αναγώγων.

Λήμμα 6.2. Έστω V ένα $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$, όπου τα U_i είναι ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπα του V . Τότε κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V είναι ισόμορφο με κάποιο από τα U_i .

Απόδειξη. Έστω U ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V και $u \in U$ μη μηδενικό στοιχείο. Έχουμε $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$ για κάποια $u_i \in U_i$. Κάποιο u_j είναι μη μηδενικό. Θεωρούμε την απεικόνιση $U \rightarrow U_j, u \rightarrow u_j$. Είναι μη μηδενικός ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ -προτύπων. Από το Λήμμα του Schur είναι ισομορφισμός. Δηλαδή έχουμε $U \simeq U_j$. □

Το πρώτο κύριο αποτέλεσμα στο κεφάλαιο αυτό είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 6.3. Θεωρούμε διάσπαση του κανονικού προτύπου

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$$

σε ευθύ άθροισμα αναγώγων υποπροτύπων του. Τότε κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο είναι ισόμορφο με κάποιο από τα U_i .

Απόδειξη. Έστω W ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και $w \in W$ μη μηδενικό στοιχείο του. Το $\{rw \in W : r \in \mathbb{C}G\}$ είναι μη μηδενικό $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του W και επειδή το W είναι ανάγωγο, έχουμε ισότητα $W = \{rw \in W : r \in \mathbb{C}G\}$. Αυτό σημαίνει ότι η ακόλουθη απεικόνιση είναι επί

$$\theta : \mathbb{C}G \rightarrow W, r \mapsto rw.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η θ είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ -προτύπων. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.1 για να συμπεράνουμε ότι υπάρχει $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο U του $\mathbb{C}G$ με

$$U \simeq \text{Im}\theta.$$

Άρα $W = \text{Im}\theta \simeq U$. Από το Λήμμα 6.2 το U είναι ισόμορφο με ένα από τα U_i και άρα το ίδιο ισχύει για το W . □

Από το παραπάνω θεώρημα έπεται ότι το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων απλών $\mathbb{C}G$ -προτύπων είναι πεπερασμένο. Επιπλέον μας δίνει συγκεκριμένο πρότυπο, το κανονικό, που περιέχει αντίτυπου κάθε ανάγωγου.

6.2. Ο χώρος των $\mathbb{C}G$ -ομομορφισμών

Έστω V, W δύο $\mathbb{C}$ -διανυσματικοί χώροι. Από τη ΓΑ ξέρουμε ότι το σύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων $V \rightarrow W$ είναι διανυσματικός χώρος με πρόσθεση που ορίζεται από $(\theta + \varphi)(v) = \theta(v) + \varphi(v)$, όπου $\theta, \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, $v \in V$ και εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από $(\lambda\theta)(v) = \lambda\theta(v)$, όπου $\lambda \in \mathbb{C}$, $\theta \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ και $v \in V$. Στη θεωρία αναπαραστάσεων μας ενδιαφέρουν οι γραμμικές απεικονίσεις $V \rightarrow W$, όπου V, W είναι $\mathbb{C}G$ -πρότυπα, που είναι επιπλέον $\mathbb{C}G$ -γραμμικές.

Ορισμός 6.4. Έστω V, W δύο $\mathbb{C}G$ -πρότυπα. Με $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ συμβολίζουμε τον υπόχωρο του $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ που αποτελείται από τις $\mathbb{C}G$ -γραμμικές απεικονίσεις $V \rightarrow W$.

Το Λήμμα του Schur δίνει ότι η διάσταση του $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ είναι το πολύ 1 όταν τα V, W είναι ανάγωγα.

Πρόταση 6.5. Αν V, W είναι ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -πρότυπα, τότε

$$\dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} 1, & V \cong W \\ 0, & V \not\cong W. \end{cases}$$

Απόδειξη. □

Hom και ευθέα αθροίσματα. Από τη ΓΑ ξέρουμε ότι οι διαστάσεις του $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, -)$ συμπεριφέρονται προσθετικά ως προς πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και στις δύο μεταβλητές. Το ίδιο ισχύει για τις διαστάσεις του $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(-, -)$.

Πρόταση 6.6. Αν V, V_1, V_2, W, W_1, W_2 είναι $\mathbb{C}G$ -πρότυπα, τότε

- (1) $\dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)) = \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)) + \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2))$,
- (2) $\dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)) = \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W)) + \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W))$.

Υπόδειξη. (1) □

Με επαγωγή στο s εύκολα γενικεύεται η προηγούμενη πρόταση για να συμπεράνουμε ότι

- (1) $\dim \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s) = \sum_{j=1}^s \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_j))$,
- (2) $\dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W)) = \sum_{i=1}^r \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W))$,

όπου V_i, W_j είναι πεπερασμένο πλήθος $\mathbb{C}G$ -προτύπων.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές έχουμε

$$(6.1) \quad \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)).$$

Όταν ένα από τα V, W είναι ανάγωγο, τότε η διάσταση των $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ και $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V)$ έχει μια φυσική ερμηνεία.

Πρόταση 6.7. Αν $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$, όπου τα U_i είναι ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -πρότυπα, τότε για κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο W έχουμε ότι ο ακέραιος $\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V))$ ισούται με το πλήθος των V_i που είναι ισόμορφα με το W .

Απόδειξη. Έχουμε σύμφωνα με τη σχέση (6.1)

$$\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)) = \sum_{i=1}^s \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W))$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 6.5,

$$\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)) = \begin{cases} 1, & V_i \cong W \\ 0, & V_i \not\cong W. \end{cases}$$

Συνεπώς προκύπτει το αποτέλεσμα για τη διάσταση $\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W))$. Η απόδειξη για την άλλη διάσταση είναι παρόμοια. $\square$

Ερχόμαστε τώρα στο δεύτερο κύριο αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου.

Θεώρημα 6.8.

(1) Για κάθε $\mathbb{C}G$ -πρότυπο U ισχύει

$$\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)) = \dim U.$$

(2) Έστω ότι $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, όπου τα U_i είναι ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -πρότυπα. Τότε για κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο U , το πλήθος των U_i που είναι ισόμορφα με το U ισούται με τη διάσταση $\dim U$.

Απόδειξη. (1) Έστω $u_1, \dots, u_d$ βάση του U . Για κάθε $i = 1, \dots, d$ ορίζουμε απεικόνιση

$$\varphi_i : \mathbb{C}G \rightarrow U, r \mapsto ru_i.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η φ_i είναι $\mathbb{C}G$ γραμμική.

Ισχυρισμός. Οι $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ αποτελούν βάση του $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$.

Για τη γραμμική ανεξαρτησία παρατηρούμε ότι αν

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_d \varphi_d = 0,$$

τότε υπολογίζοντας στο $1 \in G$ προκύπτει $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d = 0$. Άρα $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0$.

Αν $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$, τότε

$$\varphi(1) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d$$

για κάποιους μιγαδικούς λ_i . Τότε για κάθε $r \in \mathbb{C}G$ έχουμε

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(r1) = r\varphi(1) = r(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d) \\ &= \lambda_1 r u_1 + \cdots + \lambda_d r u_d \\ &= \lambda_1 \varphi_1(r) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(r).\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_d \varphi_d$, δηλαδή οι $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$.

(2) Έπεται άμεσα από το (1) του θεωρήματος και το Πρόρισμα 6.7. □

Ορισμός 6.9. Θα λέμε ότι τα ανάγωγα $\mathbb{C}G$ -πρότυπα $V_1, \dots, V_k$ είναι ένα **πλήρες σύστημα αναγώγων $\mathbb{C}G$ -προτύπων** αν είναι ανά δύο μη ισομορφα και κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο είναι ισομορφο με ένα από αυτά.

Η ύπαρξη πλήρους συστήματος αναγώγων $\mathbb{C}G$ -προτύπων έπεται άμεσα από το Θεώρημα 6.3. Από αυτό και το Θεώρημα 6.8 έπεται το εξής αποτέλεσμα.

Πόρισμα 6.10. Αν $V_1, \dots, V_k$ είναι ένα πλήρες σύστημα αναγώγων $\mathbb{C}G$ -προτύπων, τότε

$$\mathbb{C}G \simeq V_1^{\dim V_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\dim V_k}$$

και

$$|G| = (\dim V_1)^2 + \cdots + (\dim V_k)^2.$$

Για παράδειγμα, έστω G ομάδα τάξης 8. Οι παραστάσεις του 8 ως άθροισμα τετραγώνων θετικών ακεραιών είναι $8 = 1^2 + \cdots + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 2^2 + 2^2$. Δεδομένου ότι πάντα μια ανάγωγη αναπαράσταση της G είναι η τετριμμένη που έχει βαθμό 1, συμπεραίνουμε ότι ένα πλήρες σύστημα αναγώγων $\mathbb{C}G$ -προτύπων της G αποτελείται ή από 8 πρότυπα (διαστάσεων 1) ή από 5 πρότυπα (4 έχουν διάσταση 1 και 1 έχει διάσταση 2).

Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

1. Έστω H κανονική υποομάδα της G , και G/H η ομάδα πηλίκο. Έστω V ένα $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και W ο υπόχωρος του V που παράγεται από τα στοιχεία $v - hv$, όπου $v \in V, h \in H$. Δείξτε τα εξής.
 - i) Το W είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του V .
 - ii) Ο διανυσματικός χώρος πηλίκο V/W φέρει φυσική δομή $\mathbb{C}(G/H)$ -προτύπου.
 - iii) Αν το V είναι απλό $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και $hv = v$ για κάθε $h \in H, v \in V$, τότε το $\mathbb{C}G/H$ -πρότυπο V/W είναι απλό.
 - iv) Ποια από τα παραπάνω συμπεράσματα αληθεύουν για τυχαίο σώμα στη θέση του $\mathbb{C}$;
2. Βρείτε μια βάση του $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$.

Χαρακτήρες

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε την έννοια του χαρακτήρα αναπαράστασης.

Βασικά σημεία

- Ορισμός χαρακτήρα και βασικές ιδιότητες
- Χαρακτήρας του κανονικού προτύπου, χαρακτήρας του προτύπου μετάθεσης

7.1. Ορισμοί και παραδείγματα

Ίχνος πίνακα. Ξεκινάμε με υπενθυμίσεις από τη ΓΑ περί του ίχνους πίνακα. Αν $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, το **ίχνος** $Tr(A)$ είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του A , δηλαδή

$$Tr(A) = \sum_i a_{ii}.$$

Έστω $A, B, P \in M_n(\mathbb{C})$ με P αντιστρέψιμο και έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Ισχύουν οι εξής σχέσεις.

- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.
- $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.
- $Tr(AB) = Tr(BA)$.
- $Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$ (όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος).
- $Tr(A)$ ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του A .

Το ίχνος μιας γραμμικής απεικόνισης $\theta : V \rightarrow V$ ορίζεται ως το ίχνος του πίνακα της θ ως προς οποιαδήποτε βάση του V . Ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή βάσης καθώς όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.

Ορισμός 7.1. Έστω V ένα $\mathbb{C}G$ -πρότυπο και $\mathcal{B}$ μια βάση του V . Ο χαρακτήρας του V είναι η απεικόνιση

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{Tr}([g]_{\mathcal{B}}),$$

όπου $[g]_{\mathcal{B}}$ είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $V \rightarrow V, v \mapsto gv$.

Παρατηρήσεις.

- (1) Ο προηγούμενος ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή βάσης του V καθώς όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.
- (2) Ισόμορφα $\mathbb{C}G$ -πρότυπα έχουν το ίδιο ίχνος. Πράγματι, αν $V \simeq V'$ και $g \in G$, τότε από τη ΓΑ υπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ του V με $[g]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'}$. Άρα $\chi_V(g) = \chi_{V'}(g)$. Θα δούμε στο Κεφάλαιο 8 ότι ισχύει το αντίστροφο, που είναι ένα από τα σημαντικά θεωρήματα των σημειώσεων αυτών.
- (3) Για κάθε $h, g \in G$ έχουμε $\chi_V(h^{-1}gh) = \chi_V(g)$. Πράγματι, από τη ΓΑ έχουμε την ισότητα πινάκων

$$[h^{-1}gh]_{\mathcal{B}} = [h]_{\mathcal{B}}^{-1}[g]_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$$

και επομένως

$$\chi_V(h^{-1}gh) = \text{Tr}([h^{-1}gh]_{\mathcal{B}}) = \text{Tr}([h]_{\mathcal{B}}^{-1}[g]_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}) = \text{Tr}([g]_{\mathcal{B}}) = \chi_V(g).$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι οι χαρακτήρες της G είναι σταθερές συναρτήσεις στις κλάσεις συζυγίας της G . Αυτή η παρατήρηση θα έχει ισχυρές συνέπειες που θα φανούν στο Κεφάλαιο 8.

- (4) Αν για G -πρότυπα έχουμε $V = U_1 \oplus U_2$, τότε $\chi_V = \chi_{U_1} + \chi_{U_2}$. Πράγματι, αν $\mathcal{B}_i$ είναι βάση του U_i , τότε για τη βάση $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ του V έχουμε ότι για κάθε $g \in G$, ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $V \rightarrow V, v \mapsto gv$, ισούται με

$$\begin{array}{c|c} [g]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathcal{B}_2} \end{array}$$

και επομένως το ίχνος του είναι $\chi_V(g) = \text{Tr}([g]_{\mathcal{B}_1}) + \text{Tr}([g]_{\mathcal{B}_2}) = \chi_{U_1}(g) + \chi_{U_2}(g)$.

Ορισμός 7.2. Έστω $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ αναπαράσταση της G . Ο χαρακτήρας χ_ρ της ρ είναι η απεικόνιση

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{Tr}(\rho(g)).$$

Εύκολα έπεται από τους ορισμούς, ότι αν V είναι $\mathbb{C}G$ -πρότυπο με αντίστοιχη αναπαράσταση ρ , τότε $\chi_V = \chi_\rho$. Επίσης, αν ρ είναι αναπαράσταση της G με αντίστοιχο $\mathbb{C}G$ -πρότυπο V , τότε $\chi_\rho = \chi_V$.

Παράδειγμα 7.3.

- (1) Έστω V το πρότυπο μετάθεσης της $G = S_3$. Κατά τα γνωστά, έχουμε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ του V επί της οποίας δρα η G με $sv_i = v_{\sigma(i)}$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι για $\sigma = (12)$ έχουμε

$$[\sigma]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\chi_V(\sigma) = \text{Tr}([\sigma]_{\mathcal{B}}) = 1.$$

Όμοια, για $\tau = (123)$ υπολογίζουμε ότι

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\chi_V(\tau) = \text{Tr}([\tau]_{\mathcal{B}}) = 0.$$

Συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών του χαρακτήρα χ_V .

$$\begin{array}{c|cccccc} S_3 & 1 & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \hline \chi_V & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- (2) Θεωρούμε τη διεδρική ομάδα $D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle$ και την αναπαράσταση $\rho : D_4 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ αυτής που είδαμε στο Παράδειγμα 2.2 (2) η οποία ορίζεται από

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Με πράξεις υπολογίζονται οι πίνακες $\rho(a^i b^j)$, για $0 \leq i \leq 3$ και $0 \leq j \leq 1$ και τα ίχνη τους. Για παράδειγμα, $\rho(a^2) = \rho(a)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και $\text{Tr}(\rho(a^2)) = -2$.

Έτσι βρίσκουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών του χαρακτήρα χ_ρ .

$$\begin{array}{c|cccccccc} D_4 & 1 & a & a^2 & a^3 & b & ab & a^2b & a^3b \\ \hline \chi_\rho & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- (3) **Χαρακτήρας του κανονικού προτύπου $\mathbb{C}G$** Θεωρούμε τη φυσική βάση $g_1 = 1, g_2, \dots, g_n$ του κανονικού προτύπου $\mathbb{C}G$. Παρατηρούμε ότι
- τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $[g_i]$ της γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G, r \mapsto g_i r$ ως προς τη φυσική βάση είναι όλα ίσα με 0, γιατί αν $i \neq 1$ (γιατί $g_i g_j = g_j \Rightarrow g_i = 1$), και
 - $[g_1] = I_n$.

Λαμβάνοντας ίχνη προκύπτει ότι για τον χαρακτήρα χ_{reg} του κανονικού προτύπου έχουμε

$$(7.1) \quad \chi_{reg}(g) = \begin{cases} 0, & g \neq 1 \\ n, & g = 1. \end{cases}$$

Έχουμε μια άλλη σημαντική παράσταση για το χαρακτήρα χ_{reg} . Σύμφωνα με το Πόρισμα 6.10,

$$\chi_{reg} = \chi_1(1)\chi_1 + \dots + \chi_k(1)\chi_k,$$

όπου χ_i είναι ο χαρακτήρας του V_i και $V_1, \dots, V_k$ είναι ένα πλήρες σύστημα αναγώγων $\mathbb{C}G$ -προτύπων.

- (4) **Χαρακτήρας του προτύπου μετάθεσης** Γενικεύουμε εδώ το πρώτο παράδειγμα. Έστω G υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n , V ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ με βάση $v_1, v_2, \dots, v_n$ και δράση της G που ορίζεται από $sv_i = v_{\sigma(i)}$. Το στοιχείο στη θέση (i, i) του πίνακα $[\sigma]$ της γραμμικής απεικόνισης $V \rightarrow V, v \mapsto sv$ ως προς την παραπάνω βάση είναι ίσο με
- 0 αν $\sigma(i) \neq i$, και
 - ίσο με 1 αν $\sigma(i) = i$.

Λαμβάνοντας ίχνη προκύπτει ότι για τον χαρακτήρα χ_V του προτύπου μετάθεσης V της G έχουμε

$$(7.2) \quad \chi_V(\sigma) = |\text{fix}(\sigma)|,$$

όπου $\text{fix}(\sigma) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα, ορίζουμε

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{C}, \chi(\sigma) = |\text{fix}(\sigma)| - 1.$$

Θα δούμε εδώ ότι η συνάρτηση χ είναι χαρακτήρας της G . Πράγματι, το $W = \text{span}\{w\}$, όπου $w = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο καθώς $\sigma w = w$ για κάθε $\sigma \in G$. Ο χαρακτήρας του χ_W δίνεται από $\chi_W(\sigma) = 1$ για κάθε $\sigma \in G$. Τώρα από το θεώρημα του Maschke έχουμε $V = W \oplus U$ για κάποιο G -υποπρότυπο U του V . Συνεπώς $\chi_V = \chi_W + \chi_U$, οπότε $\chi_U = \chi_V - \chi_W$. Άρα

$$\chi_U(\sigma) = \chi_V(\sigma) - \chi_W(\sigma) = |\text{fix}(\sigma)| - 1 = \chi(\sigma).$$

Για παράδειγμα, όταν $G = S_3$ έχουμε τον εξής πίνακα τιμών του χαρακτήρα χ

S_3	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
χ	2	0	0	0	-1	-1

7.2. Ιδιότητες

Ο συζυγής μιγαδικού αριθμού z θα συμβολίζεται $\bar{z}$.

Πρόταση 7.4. Έστω χ χαρακτήρας $\mathbb{C}G$ -προτύπου V . Έστω $g \in G$ και m η τάξη του g . Ισχύουν τα ακόλουθα.

- (1) $\chi(1) = \dim V$.
- (2) Ο μιγαδικός αριθμός $\chi(g)$ είναι άθροισμα m -στών ριζών της μονάδας πλήθους $\chi(1)$.
- (3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
- (4) Αν g, g^{-1} είναι συζυγή στοιχεία της G , τότε $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $[g]_B$ ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $V \rightarrow V, v \mapsto gv$, ως προς βάση B του V .

(1) $\chi(1) = \text{Tr}([1]_B) = \text{Tr}(I_d) = d$, όπου I_d ο ταυτοτικός $d \times d$ πίνακας, $d = \dim V$.

(2) Επειδή έχουμε $g^m = 1$, κάθε ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης $V \rightarrow V, v \mapsto gv$, είναι m -στή ρίζα της μονάδας. Άρα το ίχνος του πίνακα $[g]_B$, που είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του, είναι άθροισμα m -στών ριζών της μονάδας πλήθους $d = \chi(1)$.

(3) Ο πίνακας $[g]_B$ είναι αντιστρέψιμος και οι ιδιοτιμές του $[g^{-1}]_B = [g]_B^{-1}$ είναι οι αντίστροφοι μιγαδικοί αριθμοί των ιδιοτιμών του $[g]_B$. Αλλά ο αντίστροφος μιας ρίζας της μονάδας είναι ο συζυγής μιγαδικός. Άρα $\text{Tr}([g^{-1}]_B) = \overline{\text{Tr}([g]_B)}$.

(4) Από την υπόθεση έχουμε $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ και από το (3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Άρα $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$ οπότε $\chi(g) \in \mathbb{R}$. $\square$

Ως εφαρμογή των παραπάνω, ας δούμε ότι από το χαρακτήρα χ αναπαράστασης $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πυρήνα της ρ . Ιδιαίτερα μπορούμε να αποφανθούμε αν η ρ είναι πιστή.

Πρόταση 7.5. *Με τον προηγούμενο συμβολισμό ισχύουν τα εξής.*

- (1) Έστω $g \in G$. Έχουμε $|\chi(g)| = n \Leftrightarrow \rho(g) = \lambda I_n$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (2) $\ker \rho = \{g \in G : \chi(g) = n\}$

Απόδειξη. (1) Από το (2) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε

$$\chi(g) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$$

όπου κάθε ε_i είναι ρίζα της μονάδας και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\rho(g)$. Ξέρουμε ότι η τριγωνική ανισότητα

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n| = n$$

είναι ισότητα αν και μόνο αν όλα τα ε_i έχουν το ίδιο πρωτεύον όρισμα. Ισοδύναμα (επειδή τα μήκη τους είναι ίσα) αν

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n.$$

Έστω m η τάξη του g . Επειδή το πολυώνυμο $x^m - 1$ έχει απλές ρίζες στο $\mathbb{C}$ και το g ικανοποιεί $g^m = 1$, ξέρουμε από τη ΓΑ ότι πίνακας $\rho(g)$ είναι διαγωνίσιμος. Άρα η συνθήκη $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n$ ισοδυναμεί με $\rho(g) = \lambda I_n$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) Είναι σαφές ότι αν $\rho(g) = I_n$, τότε $\chi(g) = n$. Αντίστροφα, έστω $\chi(g) = n$. Τότε από το (1) της πρότασης έχουμε $\rho(g) = \lambda I_n$ και επομένως $\chi(g) = \lambda n$. Άρα $\lambda = 1$ και $\rho(g) = I_n$. $\square$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

1. Υπολογίστε τις τιμές στα $\sigma = (12), (123)(67)$ του χαρακτήρα χ_{per} του προτύπου μετάθεσης της S_7 .
2. Έστω $g \in G$ στοιχείο τάξης 2. Τότε για κάθε χαρακτήρα χ της G ισχύει $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ και $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{2}$. Ειδικά, αν ο βαθμός του χ είναι 2, τότε $\chi(g) \in \{-2, 0, 2\}$.
3. Έστω χ χαρακτήρας πιστής αναπαράστασης της G . Δείξτε ότι

$$Z(G) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}.$$

Εσωτερικό γινόμενο χαρακτήρων

Ο σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να δείξουμε ότι αν οι χαρακτήρες δύο $\mathbb{C}G$ -προτύπων V, W είναι ίσοι, τότε τα V, W είναι ισόμορφα. Θα δούμε επίσης συνέπειες του αποτελέσματος αυτού.

Βασικά σημεία

- Εσωτερικό γινόμενο χαρακτήρων
 - Ταυτοδύναμα στοιχεία και χαρακτήρες
 - Ορθοκανονικότητα αναγώγων χαρακτήρων
 - Δύο $\mathbb{C}G$ -πρότυπα είναι ισόμορφα αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο χαρακτήρα.
-

8.1. Εσωτερικό γινόμενο χαρακτήρων

Με $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ συμβολίζουμε το $\mathbb{C}$ -διανυσματικό χώρο των απεικονίσεων $G \rightarrow \mathbb{C}$. Η πρόσθεση στο $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ ορίζεται από

$$(\theta + \varphi)(g) = \theta(g) + \varphi(g), g \in G$$

και ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός του $\mathbb{C}$ επί του $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ ορίζεται από

$$(\lambda\theta)(g) = \lambda\theta(g), \lambda \in \mathbb{C}, g \in G.$$

Με $\bar{z}$ συμβολίζουμε το συζυγή μιγαδικό αριθμό του μιγαδικού z .

Ορισμός 8.1. Έστω $\theta, \varphi \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$. Θέτουμε

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g) \overline{\varphi(g)} \in \mathbb{C}.$$

Αφήνουμε ως άσκηση την επαλήθευση ότι με τον παραπάνω ορισμό έχουμε ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle -, - \rangle : \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) \times \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Παρατηρήσεις. Έστω χ, ψ χαρακτήρες της G .

(1) Ισχύει

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}) = \langle \psi, \chi \rangle.$$

Πράγματι, η πρώτη ισότητα έπεται από τη σχέση $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$ και η δεύτερη από το γεγονός ότι καθώς το g διατρέχει το σύνολο G , το ίδιο ισχύει για το g^{-1} .

Συνεπώς έχουμε $\langle \chi, \psi \rangle \in \mathbb{R}$. Θα δούμε στην παράγραφο αυτή ότι $\langle \chi, \psi \rangle$ είναι μη αρνητικός ακέραιος.

(2) Αν $g_1, \dots, g_l$ είναι αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G , τότε

$$(8.1) \quad \langle \chi, \psi \rangle = \frac{\chi(g_1) \overline{\psi(g_1)}}{|C(g_1)|} + \frac{\chi(g_2) \overline{\psi(g_2)}}{|C(g_2)|} + \dots + \frac{\chi(g_l) \overline{\psi(g_l)}}{|C(g_l)|}.$$

Πράγματι, αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε χαρακτήρας είναι σταθερή συνάρτηση σε κάθε κλάση συζυγίας $cl(g)$ της G και από τη σχέση $|cl(g)| = \frac{|G|}{|C(g)|}$ (βλ. Πρόγραμμα 1.8).

Παράδειγμα 8.2. Έστω χ_{per} ο χαρακτήρας του προτύπου μετάθεσης της S_3 και ψ ο τετριμμένος χαρακτήρας της S_3 . Μια επιλογή αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας της S_3 είναι $g_1 = 1, g_2 = (12), g_3 = (123)$. Οι τιμές των χ_{per}, ψ δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

S_3	1	(12)	(123)
$ C(g_i) $	6	2	3
χ_{per}	3	1	0
ψ	1	1	1
$\chi - \psi$	2	0	-1

Εφαρμόζοντας τον τύπο (8.1) έχουμε

$$\langle \chi_{per}, \chi_{per} \rangle = \frac{3^2}{6} + \frac{1^2}{2} + \frac{0^2}{3} = 2,$$

$$\langle \chi_{per}, \psi \rangle = \frac{3 \cdot 1}{6} + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{0 \cdot 1}{3} = 1.$$

Στην παράγραφο 7.3 είδαμε ότι $\chi_{per} - \psi$ είναι χαρακτήρας της S_3 . Έχουμε

$$\langle \chi_{per} - \psi, \chi_{per} - \psi \rangle = \frac{2^2}{6} + \frac{0^2}{2} + \frac{(-1)^2}{3} = 1.$$

Ταυτοδύναμα στοιχεία. Η επόμενη πρόταση περιέχει το ουσιαστικό τμήμα της απόδειξης του κεντρικού Θεωρήματος 8.10.

Ορισμός 8.3. Έστω V, W δύο CG -πρότυπα. Θα λέμε ότι τα V, W δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα αν δεν υπάρχουν ανάγωγα υποπρότυπα V' του V και W' του W με $V' \simeq W'$.

Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι αν τα V, W δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα, τότε κάθε $\mathbb{C}G$ -ομομορφισμός $\theta : V \rightarrow W$ είναι ο μηδενικός. Πράγματι, από το Λήμμα 6.1, $V = \ker \theta \oplus U$ για κάποιο υποπρότυπο U του V που έχει την ιδιότητα $U \simeq \text{Im} \theta$. Από το θεώρημα του Maschke, το U είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων υποπρωτύπων. Επειδή τα V, W δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα συνάγουμε ότι $U = \{0\}$. Άρα $V = \ker \theta$ και ο θ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.

Πρόταση 8.4. Έστω $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$ ευθύ άθροισμα $\mathbb{C}G$ υποπρωτύπων που δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα. Έστω $e_i \in W_i$ με $1 = e_1 + e_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

- (1) Αν $w_i \in W_i$, τότε $e_i w_i = w_i$ για κάθε i και $e_i w_j = 0$ για κάθε $i \neq j$.
- (2) $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ και $e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2$.
- (3) Έστω χ ο χαρακτήρας του W_1 . Τότε

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g.$$

- (4) $\langle \chi, \chi \rangle = \chi(1)$.

Απόδειξη. (1) Σταθεροποιούμε $w_1 \in W_1$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$W_2 \rightarrow W_1, w_2 \mapsto w_2 w_1.$$

Καθώς είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ -πρωτύπων, η προηγούμενη Παρατήρηση λέει ότι είναι ο μηδενικός. Άρα $e_2 w_1 = 0$. Με παρόμοιο επιχείρημα έχουμε $e_1 w_2 = 0$ για κάθε $w_2 \in W_2$. Τώρα

$$w_1 = 1w_1 = (e_1 + e_2)w_1 = e_1 w_1 + e_2 w_1 = e_1 w_1.$$

Με παρόμοιο επιχείρημα έχουμε $w_2 = e_2 w_2$ για κάθε $w_2 \in W_2$.

(2) Έπεται άμεσα από το (1).

(3) Έστω $x \in G$. Θα υπολογίσουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους το ίχνος της γραμμικής απεικόνισης

$$\theta : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G, w \mapsto x^{-1} e_1 w$$

(η οποία δεν είναι γενικά $\mathbb{C}G$ -γραμμική).

1ος τρόπος (με βάση τα προηγούμενα). Για κάθε $w \in \mathbb{C}G$ υπάρχει μοναδική παράσταση $w = w_1 + w_2$, όπου $w_i \in W_i$, καθώς $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$. Έχουμε

$$x^{-1} e_1 w = x^{-1} w_1.$$

Πράγματι, $x^{-1} e_1 w = x^{-1} e_1 w_1 + x^{-1} e_1 w_2 = x^{-1} e_1 w_1 = x^{-1} w_1$ λόγω του (1). Άρα το ίχνος της θ ισούται με το ίχνος της γραμμικής απεικόνισης

$$W_1 \rightarrow W_1, w_1 \mapsto x^{-1} w_1,$$

που εξ ορισμού είναι η τιμή $\chi(x^{-1})$ του χαρακτήρα στο x^{-1} . Δηλαδή $\text{Tr}(\theta) = \chi(x^{-1})$.

2ος τρόπος (με βάση το κανονικό πρότυπο). Έστω $e_1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g$, $\lambda_g \in \mathbb{C}$, οπότε

$$\theta(w) = \sum_{g \in G} \lambda_g (x^{-1} g)w.$$

Άρα

$$Tr(\theta) = \sum_{g \in G} \lambda_g \chi_{reg}(x^{-1}g).$$

Όμως για το χαρακτήρα χ_{reg} του κανονικού προτύπου έχουμε $\chi_{reg}(h) = 0$ αν $h \in G - \{1\}$. Άρα

$$Tr(\theta) = \lambda_x \chi_{reg}(1) = \lambda_x |G|.$$

Από τις δύο παραστάσεις του $Tr(\theta)$ παίρνουμε $\chi(x^{-1}) = \lambda_x |G|$ και άρα $\lambda_x = \frac{1}{|G|} \chi(x^{-1})$. Αντικαθιστώντας έχουμε $e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$.

(4) Από το (3) έχουμε $e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$ και από το (2) $e_1^2 = e_1$. Υπολογίζουμε το συντελεστή του στοιχείου βάσης 1 στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης. Ο εν λόγω συντελεστής στο αριστερό μέλος είναι ίσος με

$$\frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\chi(g) = \frac{1}{|G|} \langle \chi, \chi \rangle$$

και στο δεξιό μέλος είναι ίσος με

$$\frac{1}{|G|} \chi(1).$$

Συνεπώς $\langle \chi, \chi \rangle = \chi(1)$. □

Θεώρημα 8.5 (ορθοκανονικότητα αναγώγων χαρακτήρων). Έστω U, V δύο ανάγωγα μη ισόμορφα πρότυπα με χαρακτήρες χ, ψ αντίστοιχα. Τότε

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1, \quad \langle \chi, \psi \rangle = 0$$

Απόδειξη. (1) Από την ανάλυση του κανονικού προτύπου σε ευθύ άθροισμα αναγώγων, Θεώρημα 6.8(2), έπεται ότι

$$\mathbb{C}G = U^{\dim U} \oplus W_2,$$

όπου το W_2 είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του $\mathbb{C}G$ και τα $U^{\dim U}, W_2$ δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.4(4) στο χαρακτήρα $\dim U \chi$ του $U^{\dim U}$, παίρνουμε

$$\langle \dim U \chi, \dim U \chi \rangle = \dim U \chi(1) \Rightarrow (\dim U)^2 \langle \chi, \chi \rangle = (\dim U)^2 \Rightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1.$$

(2) Ξανά από το Θεώρημα 6.8(2) έπεται ότι ότι

$$\mathbb{C}G = U^{\dim U} \oplus V^{\dim V} \oplus W_2,$$

όπου το W_2 είναι $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο του $\mathbb{C}G$ και τα $U^{\dim U} \oplus V^{\dim V}, W_2$ δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.4(4) στο χαρακτήρα $\dim U \chi + \dim V \psi$ του $U^{\dim U} \oplus V^{\dim V}$, παίρνουμε

$$\langle \dim U \chi + \dim V \psi, \dim U \chi + \dim V \psi \rangle = \dim U \chi(1) + \dim V \psi(1)$$

οπότε

$$(\dim U)^2 \langle \chi, \chi \rangle + (\dim V)^2 \langle \psi, \psi \rangle + 2(\dim U)(\dim V) \langle \chi, \psi \rangle = (\dim U)^2 + (\dim V)^2.$$

Από το πρώτο μέρος του θεωρήματος έχουμε $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$. Κατά συνέπεια, $2(\dim U)(\dim V) \langle \chi, \psi \rangle = 0$ και άρα $\langle \chi, \psi \rangle = 0$. □

8.2. Συνέπειες της ορθοκανονικότητας των αναγώγων χαρακτήρων

Ακολουθούν σημαντικά πορίσματα του θεωρήματος 8.5. Έστω

- $V_1, V_2, \dots, V_s$ ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων αναγώγων $\mathbb{C}G$ προτύπων,
- χ_i ο χαρακτήρας του V_i , και
- ψ τυχαίος χαρακτήρας της G , οπότε $\psi = d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + \dots + d_s\chi_s$ για κάποιους μη αρνητικούς ακέραιους d_i .

Πόρισμα 8.6. Έχουμε $\langle \psi, \chi \rangle = d_i$ και $\langle \psi, \psi \rangle = \sum_i d_i^2$.

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 8.5 □

Ένας χαρακτήρας θα λέγεται **ανάγωγος** αν είναι χαρακτήρας αναγώγου $\mathbb{C}G$ -προτύπου. Ισοδύναμα αν, με τον παραπάνω συμβολισμό, ισούται με έναν από τους χ_i .

Πόρισμα 8.7. Ο χαρακτήρας ψ είναι ανάγωγος αν και μόνο αν $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 8.5 ξέρουμε ότι αν ο χαρακτήρας ψ είναι ανάγωγος, τότε $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

Αντίστροφα, αν για το χαρακτήρα ψ ισχύει $\langle \psi, \psi \rangle = 1$, τότε από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε $\sum_i d_i^2 = 1$. Επειδή οι d_i είναι ακέραιοι, έπεται ότι όλοι είναι ίσοι με μηδέν, εκτός από έναν που ισούται με 1. Άρα $\psi = \chi_i$ για κάποιο i . □

Παράδειγμα 8.8. Στο Παράδειγμα 8.2 υπολογίσαμε ότι ο χαρακτήρας $\chi_{per} - \psi$ ικανοποιεί $\langle \chi_{per} - \psi, \chi_{per} - \psi \rangle = 1$. Άρα είναι ανάγωγος.

Πόρισμα 8.9. Οι ανάγωγοι χαρακτήρες είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

Απόδειξη. Αν $\sum_i \lambda_i \chi_i = 0$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 8.5 έχουμε για κάθε j

$$0 = \left\langle \sum_i \lambda_i \chi_i, \chi_j \right\rangle = \sum_i \lambda_i \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \lambda_j \langle \chi_j, \chi_j \rangle = \lambda_j.$$

□

Το επόμενο πόρισμα είναι ο λόγος που οι χαρακτήρες αποτελούν κεντρικό εργαλείο στη μελέτη αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων υπεράνω των μιγαδικών αριθμών. Επομένως παίρνει προαγωγή σε θεώρημα.

Θεώρημα 8.10. Αν U, V είναι $\mathbb{C}G$ -πρότυπα, τότε $U \simeq V$ αν και μόνο αν $\chi_U = \chi_V$.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής. Έστω ότι $\chi_U = \chi_V$. Υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι d_i με $U \simeq V_1^{d_1} \oplus \dots \oplus V_s^{d_s}$ και $V \simeq V_1^{c_1} \oplus \dots \oplus V_s^{c_s}$. Άρα $\chi_U = \sum_i d_i \chi_i$ και $\chi_V = \sum_i c_i \chi_i$, οπότε

$$\sum_i d_i \chi_i = \sum_i c_i \chi_i.$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των χ_i του προηγούμενου πορίσματος προκύπτει ότι $d_i = c_i$ για κάθε i . Συνεπώς $U \simeq V$. $\square$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο μη αρνητικός ακέραιος $\langle \chi_U, \chi_V \rangle$ έχει φυσική ερμηνεία.

Πόρισμα 8.11. Αν U, V είναι $\mathbb{C}G$ -πρότυπα, τότε

$$\dim \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V) = \langle \chi_U, \chi_V \rangle.$$

Απόδειξη. Υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι d_i, c_i με $U \simeq V_1^{d_1} \oplus \dots \oplus V_s^{d_s}$ και $V \simeq V_1^{c_1} \oplus \dots \oplus V_s^{c_s}$. Άρα $\chi_U = \sum_i d_i \chi_i$ και $\chi_V = \sum_i c_i \chi_i$.

Από τη σχέση (6.1) παίρνουμε

$$\dim \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V) = \sum_i d_i c_i$$

και από το Θεώρημα 8.5 παίρνουμε

$$\langle \chi_U, \chi_V \rangle = \sum_i d_i c_i.$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 8

1. Αν χ είναι χαρακτήρας της G , δείξτε ότι η απεικόνιση $\bar{\chi} : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \overline{\chi(g)}$, είναι χαρακτήρας της G . Επίσης, ο χαρακτήρας χ είναι ανάγωγος αν και μόνο αν ο χαρακτήρας $\bar{\chi}$ είναι ανάγωγος.
2. Υπολογίστε τα e_1 της Πρότασης 8.4 για τις τρεις επιλογές $W_1 = V_i^{\dim V_i}, i = 1, 2, 3$, όπου V_1, V_2, V_3 είναι πλήρες σύστημα των αναγώγων προτύπων της S_3 . Δείξτε ότι το γινόμενο κάθε δύο διακεκριμένων από τα e_1 είναι ίσο με 0.

Πίνακας χαρακτήρων

Βασικά σημεία

- Το πλήθος των αναγώγων χαρακτήρων
- Ορθογώνιες σχέσεις γραμμών, ορθογώνιες σχέσεις στηλών
- Παραδείγματα και ασκήσεις

9.1. Το πλήθος των αναγώγων χαρακτήρων

Θα δείξουμε εδώ το σημαντικό αποτέλεσμα ότι το πλήθος των αναγώγων χαρακτήρων της G ισούται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G . Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τους εξής συμβολισμούς.

- $C_1, C_2, \dots, C_l$ είναι οι κλάσεις συζυγίας της G .
- $Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zx = xz \ \forall x \in \mathbb{C}G\}$ είναι το κέντρο της άλγεβρας $\mathbb{C}G$ και $\dim Z(\mathbb{C}G)$ είναι η διάσταση του $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου $Z(\mathbb{C}G)$.
- $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ είναι οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G .
- $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $G \rightarrow \mathbb{C}$.
- $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $G \rightarrow \mathbb{C}$ που είναι σταθερές στις κλάσεις συζυγίας της G . Θα καλούμε το $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ το **χώρο των συναρτήσεων κλάσεων** της G .

Ξέρουμε ότι κάθε χαρακτήρας της G ανήκει στο $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ (βλ. Παράγραφο 7.1).

Είναι σαφές ότι η διάσταση του $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ ισούται με l , το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G . Πράγματι, μία βάση του $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ είναι οι λεγόμενες χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\psi_1, \dots, \psi_l$ που ορίζονται από $\psi_i(g_j) = \delta_{ij}$, το δέλτα του Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Θεώρημα 9.1. Με τους παραπάνω συμβολισμούς, $l = \dim Z(\mathbb{C}G) = k$.

Απόδειξη. (1) $l = \dim Z(\mathbb{C}G)$. Ορίζουμε

$$\overline{C_i} = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{C}G.$$

Θα δείξουμε ότι τα $\overline{C_1}, \dots, \overline{C_l}$ αποτελούν βάση του $Z(\mathbb{C}G)$.

(1α) Ισχύει $\overline{C_i} \in Z(\mathbb{C}G)$. Πράγματι, έστω $h \in G$. Έχουμε

$$h^{-1}\overline{C_i}h = \sum_{g \in C_i} h^{-1}gh = \sum_{g \in C_i} g$$

γιατί καθώς το g διατρέχει το σύνολο C_i , το ίδιο συμβαίνει με το $h^{-1}gh$. Άρα $h^{-1}\overline{C_i}h = \overline{C_i}$ και επομένως $\overline{C_i} \in Z(\mathbb{C}G)$.

(1β) Τα $\overline{C_1}, \dots, \overline{C_l}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $Z(\mathbb{C}G)$. Αυτό είναι άμεσο από τον ορισμό των $\overline{C_i}$ και από το γεγονός ότι για κάθε $i \neq j$, είναι $C_i \cap C_j = \emptyset$.

(1γ) Τα $\overline{C_1}, \dots, \overline{C_l}$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $Z(\mathbb{C}G)$. Πράγματι, έστω

$$r \in Z(\mathbb{C}G), r = \sum_{g \in G} \lambda_g g.$$

Για κάθε $h \in G$ έχουμε

$$r = h^{-1}gh = \sum_{g \in G} \lambda_g h^{-1}gh = \sum_{g \in G} \lambda_{hgh^{-1}} g.$$

Άρα

$$\lambda_{hgh^{-1}} = \lambda_g,$$

που σημαίνει ότι στην παράσταση $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ συζυγή στοιχεία έχουν τον ίδιο συντελεστή λ . Βγάζοντας κοινούς παράγοντες παίρνουμε το r ως γραμμικό συνδυασμό των $\overline{C_1}, \dots, \overline{C_l}$.

Από τα (1α)-(1γ) έπεται το (1).

(2) $\dim Z(\mathbb{C}G) = k$.

(2α) Ισχύει $\dim Z(\mathbb{C}G) \geq k$. Πράγματι, σημειώσαμε πριν ότι $\chi_1, \dots, \chi_k \in \mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ και είδαμε στο Πρόσχημα 8.9 ότι τα στοιχεία $\chi_1, \dots, \chi_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα $l \geq k$. Από το (1) συμπεραίνουμε ότι $\dim Z(\mathbb{C}G) \geq k$.

(2β) Ισχύει $\dim Z(\mathbb{C}G) \leq k$. Πράγματι, εφαρμόζοντας το Πρόσχημα 6.10, έχουμε

$$\mathbb{C}G = V_1^{\dim V_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\dim V_k},$$

όπου $V_1, \dots, V_k$ είναι ένα πλήρες σύστημα αναγώγων $\mathbb{C}G$ -υποπροτύπων του $\mathbb{C}G$. Άρα υπάρχουν $\alpha_i \in V_i^{\dim V_i}$ με

$$1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_k.$$

Τώρα αν $z \in Z(\mathbb{C}G)$ παίρνουμε $z = z\alpha_1 + \dots z\alpha_k$. Από την Πρόταση υπάρχουν μιγαδικοί λ_i (που εξαρτώνται από το z) τέτοιο ώστε $z\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$. Κατά συνέπεια,

$$z = \lambda_1\alpha_1 + \dots \lambda_k\alpha_k.$$

Αυτό μας λέει ότι

$$Z(\mathbb{C}G) \subseteq \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\},$$

που σημαίνει ότι $\dim Z(\mathbb{C}G) \leq k$.

Από τα (2α), (2β) έπεται το (2). $\square$

Πόρισμα 9.2. Οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G αποτελούν ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ των συναρτήσεων κλάσεων.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 8.9 τα στοιχεία $\chi_1, \dots, \chi_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και από το Θεώρημα 9.1 το πλήθος τους k ισούται με τη διάσταση $\dim \mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$. Άρα αποτελούν βάση του $\dim \mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$. Ότι είναι ορθοκανονικά στοιχεία το ξέρουμε από το Θεώρημα 8.5. $\square$

Παράδειγμα 9.3. Θα βρούμε τους ανάγωγους χαρακτήρες της S_3 και στη συνέχεια θα παραστήσουμε τον $\psi \in \mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$ ως γραμμικό συνδυασμό αυτών, όπου $\psi(1) = 7, \psi((12)) = 1, \psi((123)) = 1$.

Ξέρουμε ότι το πλήθος των αναγώγων χαρακτήρων είναι ίσο με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της S_3 , δηλαδή είναι ίσο με 3. Έχουμε τον τετριμμένο χαρακτήρα χ_1 τον χαρακτήρα προσήμου χ_2 που δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

g_i	1	(12)	(123)
$ C(g_i) $	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Από το Πόρισμα 6.10 έχουμε $|S_3| = \chi_1(1)^2 + \chi_2(1)^2 + \chi_3(1)^2$, οπότε $\chi_3(1) = 2$. Οι σχέσεις $\langle \chi_1, \chi_3 \rangle = 0, \langle \chi_2, \chi_3 \rangle = 0$ δίνουν

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2}{6} + \frac{1 \cdot \chi_3((12))}{2} + \frac{1 \cdot \chi_3((123))}{3} &= 0 \\ \frac{1 \cdot 2}{6} + \frac{(-1) \cdot \chi_3((12))}{2} + \frac{1 \cdot \chi_3((123))}{3} &= 0 \end{aligned}$$

οπότε βρίσκουμε $\chi_3((12)) = 0, \chi_3((123)) = 1$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \psi, \chi_i \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \psi, \chi_1 \rangle &= \frac{7}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2 \\ \langle \psi, \chi_2 \rangle &= \frac{7}{6} + \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \\ \langle \psi, \chi_3 \rangle &= \frac{14}{6} + \frac{0}{2} + \frac{-1}{3} = 2. \end{aligned}$$

Άρα $\psi = \sum_i \langle \psi, \chi_i \rangle \chi_i = 2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$.

9.2. Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων

Θα χρειαστούμε τους εξής συμβολισμούς.

- $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ είναι οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G .
- $g_1, g_2, \dots, g_k$ είναι αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G
- $C(g_i)$ είναι η κεντροποιούσα υποομάδα του g_i .

Ο **πίνακας χαρακτήρων** της G είναι ο $k \times k$ πίνακας που στη θέση (r, s) έχει την εγγραφή $\chi_r(g_s)$. Είθισται να τον παριστάνουμε στη μορφή

g_i	g_1	$\dots$	g_k
$ C(g_i) $	$ C(g_1) $	$\dots$	$ C(g_k) $
χ_1	$\chi_r(g_s)$		
χ_2			
$\vdots$			
χ_k			

Για παράδειγμα, είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι ο πίνακας χαρακτήρων της S_3 είναι

g_i	1	(12)	(123)
$ C(g_i) $	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1.

Οι ορθογώνιες σχέσεις γραμμών είναι

$$(9.1) \quad \sum_{i=1}^k \frac{\chi_r(g_i) \overline{\chi_s(g_i)}}{|C(g_i)|} = \delta_{rs},$$

και οι ορθογώνιες σχέσεις στηλών είναι

$$(9.2) \quad \sum_{i=1}^k \chi_i(g_r) \overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs} |C(g_r)|.$$

Για παράδειγμα, στην ομάδα S_3 : αν $r = s = 2$ η αντίστοιχη ορθογώνια σχέση στηλών είναι $1^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$ και αν $r = 2, s = 1$ είναι $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$.

Οι ορθογώνιες σχέσεις γραμμών δεν είναι νέες, καθώς δίνονται από

$$\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \delta_{rs}$$

που είδαμε στο Θεώρημα 8.5. Ας δείξουμε τις ορθογώνιες σχέσεις στηλών. Θεωρούμε τον $k \times k$ πίνακα

$$M = \left(\frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_i)|}} \right).$$

Με $\overline{M}$ συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον M παίρνοντας τους συζυγείς μιγαδικούς των στοιχείων του M και με $\overline{M}^t$ συμβολίζουμε τον ανάστροφο του $\overline{M}$. Από τον πολλαπλασιασμό πινάκων έπεται ότι το στοιχείο του γινομένου $M \overline{M}^t$ στη

θέση (r, s) ισούται με $\sum_{i=1}^k \frac{\chi_r(g_i) \overline{\chi_s(g_i)}}{|C(g_i)|}$ που από τις ορθογώνιες σχέσεις γραμμών ισούται με δ_{rs} . Άρα $M \overline{M}^t = I_k$. Από ΓΑ ξέρουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $\overline{M}^t M = I_k$. Το στοιχείο στη θέση (r, s) αυτού του γινομένου πινάκων ισούται με

$$\frac{1}{\sqrt{|C(g_r)|} \sqrt{|C(g_s)|}} \sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(g_r)} \chi_i(g_s) = \delta_{rs}.$$

Συνεπώς έπεται η σχέση (9.2).

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω απόδειξη λέει ότι οι ορθογώνιες σχέσεις γραμμών είναι ισοδύναμες με τις ορθογώνιες σχέσεις στηλών.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 9

1. Δίνεται το ακόλουθο τμήμα του πίνακα χαρακτήρων της S_4 .

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$ C(g_i) $	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4					
χ_5					

Βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων ως εξής.

- i) Είδαμε στο Παράδειγμα 7.3(4) ότι ο τύπος $\chi(\sigma) = |\text{fix}(\sigma)| - 1$ ορίζει χαρακτήρα της S_4 . Υπολογίστε τον και δείξτε ότι είναι ανάγωγος χαρακτήρας.
 - ii) Θέτοντας $\chi_4 = \chi$, προσδιορίστε την τελευταία γραμμή με τη σχέσεις ορθογωνιότητας.
2. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V με βάση $\mathcal{B} = \{v_{i,j} : 1 \leq i, j \leq 3\}$ και τη δράση της S_3 στο $\mathcal{B}$ δίνεται από $\sigma v_{i,j} = v_{\sigma(i), \sigma(j)}$. Παραστήστε το χαρακτήρα χ_V ως γραμμικό συνδυασμό των αναγώνων χαρακτήρων της S_3 . Είναι σωστό ότι το V περιέχει $\mathbb{C}S_3$ -υποπρότυπο ισόμορφο με το κανονικό $\mathbb{C}S_3$ -πρότυπο;
 3. Υπολογίστε τον πίνακα χαρακτήρων της A_4 .
 4. Είναι σωστό ότι
 - i) για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G διάφορου του τετριμμένου ισχύει $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$;
 - ii) για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της S_n διάφορου του χαρακτήρα προσήμου ισχύει $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \chi(\sigma) = 0$;
 5. Δείξτε ότι αν $g \in G$ είναι τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^k |\chi_i(g)|^2 > \frac{|G|}{2}$, όπου $\chi_1, \dots, \chi_k$ είναι οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G , τότε $g \in Z(G)$.
 6. Δείξτε ότι μια ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της G έχει βαθμό 1.
 7. Έστω H αβελιανή υποομάδα της G . Κάθε ανάγωγος χαρακτήρας της G έχει βαθμό $\leq [G : H]$.

8. Έστω χ χαρακτήρας της G με $\chi(g) = 0$ για κάθε $g \in G - \{1\}$. Τότε $\chi = m\chi_{reg}$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο m , όπου χ_{reg} είναι ο χαρακτήρας του κανονικού προτύπου $\mathbb{C}G$.
9. Έστω $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ ανάγωγη αναπαράσταση με χαρακτήρα χ . Δείξτε τα εξής.
 - i) Για κάθε $g \in Z(G)$, υπάρχει $\lambda_g \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\rho(g) = \lambda_g I_n$.
 - ii) Για κάθε $g \in Z(G)$, $|\chi(g)| = n$.
 - iii) $n^2 \leq [G : Z(G)]$.
10. Θεωρούμε τη δράση της G στο σύνολο $X = G$ μέσω συζυγίας $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gxg^{-1}$. Δείξτε ότι ο χαρακτήρας του αντίστοιχου $\mathbb{C}G$ -προτύπου δίνεται από $\chi(g) = |C(g)|, g \in G$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, ή διαφορετικά, δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής πίνακα χαρακτήρων είναι μη αρνητικός ακέραιος.
11. Έστω $\rho : G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ αναπαράσταση βαθμού 2 τέτοια ώστε το 1 είναι ιδιοτιμή του $\rho(g)$ για κάθε $g \in G$. Δείξτε ότι η ρ είναι το ευθύ άθροισμα δύο αναπαραστάσεων βαθμού 1.
12. Δείξτε ότι το πρότυπο μετάθεσης της S_n είναι ευθύ άθροισμα δύο αναγώγων προτύπων αν $n \geq 2$.
13. Έστω ρ, ω αναπαραστάσεις της G με βαθμούς n και 1 αντίστοιχα. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\omega\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), \omega\rho(g) = \omega(g)\rho(g)$, είναι αναπαράσταση της G . Επίσης δείξτε ότι αν η ρ είναι ανάγωγη, τότε και η $\omega\rho$ είναι ανάγωγη. Αληθεύει το αντίστροφο της τελευταίας συνεπαγωγής?
14. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δώσετε μια άλλη απόδειξη του δεύτερου σκέλους της άσκησης 1.
15. (Γενικευμένες ορθογώνιες σχέσεις γραμμών) Έστω $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G . Δείξτε ότι για κάθε $h \in G$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_r(g h) \overline{\chi_s(g)} = \delta_{rs} \frac{\chi_r(h)}{\chi_r(1)}$$

16. Βρείτε τις πεπερασμένες ομάδες που έχουν ακριβώς 2 ανάγωγους χαρακτήρες.
17. Για κάθε χαρακτήρα χ αβελιανής ομάδας ισχύει $\langle \chi, \chi \rangle \geq \chi(1)$.
18. Έστω $g \in G$. Τα στοιχεία g, g^{-1} είναι συζυγή αν και μόνο αν $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G .

Βιβλιογραφία

- [1] Alperin, *Groups and Representations*, Springer, 1995.
- [2] Artin, *Algebra*, Pearson, 2010.
- [3] James and Liebeck, *Representations and characters of groups*, 2nd edition, Cambridge 2001. (Καλογραμμένο, προπτυχιακό με πολλά παραδείγματα και ασκήσεις. Αρμόζει για τις ανάγκες και την ύλη του πρώτου μέρους του μαθήματος.)
- [4] Sagan, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Springer 2001. (Εξαιρετικό για τις αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας, στις οποίες εστιάζει και εμβαθύνει από το κεφάλαιο 2. Αρμόζει για τις ανάγκες και την ύλη του δεύτερου μέρους του μαθήματος.)
- [5] Fulton and Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer 1991. (Καταπληκτικό, μεταπτυχιακό. Καλύπτει πεπερασμένες ομάδες, άλγεβρες Lie και ομάδες Lie. Η τομή με το μάθημα περιέχεται στα πρώτα 5 κεφάλαια του βιβλίου.)
- [6] James, *The representation theory of the symmetric groups*, Springer 1978. (Η καθιερωμένη αναφορά στις modular και ανεξαρτήτου χαρακτηριστικής θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας.)
- [7] Μαλιάκας, Μαθήματα Βασικής Άλγεβρας και Θεωρίας Galois, Εκδόσεις Τσότρα 2022. (Θα αναφερόμαστε σε αυτό για στοιχεία Βασικής Άλγεβρας).
- [8] Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer 1977. (Ό,τι βρίσκουμε γραμμένο από το Serre το βάζουμε στη βιβλιοθήκη μας.)
- [9] Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups*, Springer 2012. (Δημοφιλές προπτυχιακό.)
- [10] Webb, *A Course in Finite Group Representation Theory*, Cambridge 2016. (Μεταπτυχιακό.)

Ευρετήριο συχνών συμβόλων

$(a \ b \ c \ d)$, 9
 $C(x)$, 6
 $C_G(x)$, 6
 FG , 23, 24
 $Fix_G(X)$, 8
 $GL(2, \mathbb{R})$, 2
 $GL_n(F)$, 13
 G_x , 5
 $Tr(A)$, 46
 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$, 28
 X^G , 8
 $Z(\mathbb{C}G)$, 37
 $[g]_{\mathcal{B}}$, 17
 $\mathcal{CF}(G, \mathbb{C})$, 57
 $\mathbb{C}G$, 24

$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, 43
 $\deg \rho$, 13
 $\mathcal{B}$, 17
 $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$, 51
 $\mathcal{O}_x$, 5
 $\text{Stab}(x)$, 6
 $cl(x)$, 6
 $fix(\sigma)$, 49
 δ_{ij} , 58
 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, 10
 χ_V , 47
 χ_{reg} , 48
 χ_ρ , 47
 sign , 14

Ευρετήριο

- p -ομάδα, 9
 FG -γραμμική, 26
 FG -ομομορφισμός, 26
 FG -υποπρότυπο, 19
 G -σύνολο, 2
- Θεώρημα του Maschke, 31
Λήμμα του Schur, 36
άλγεβρα ομάδας, 23, 24
ίχνος, 46
ανάγωγη αναπαράσταση, 21
ανάγωγο, 20
ανάγωγος χαρακτήρας, 55
αναπαράσταση, 13
αναπαράσταση προσήμου, 14
αναπαραστάσεις πεπερασμένων
 αβελιανών ομάδων, 38
απλή ομάδα, 22
αστείο, 7, 20
βαθμός αναπαράστασης, 13
γενική γραμμική ομάδα, 13
δέλτα του Kronecker, 58
δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα,
 52
διαμέριση, 10
δράση και μεταθέσεις, 3
δράση ομάδας, 2
δράση της G στη G μέσω αριστερού
 πολλαπλασιασμού, 2
δράση της G στη G μέσω συζυγίας, 2
δράση της G στις κλάσεις G/H , 3
- δράση της G στο σύνολο των
 υποομάδων της, 3
εξίσωση κλάσεων, 8
ευθύ άθροισμα, 28
θεώρημα τροχιάς-σταθεροποιούσας
 υποομάδας, 7
ιομορφισμός FG -προτύπων, 27
ισοδύναμες αναπαραστάσεις, 15
κέντρο της FG , 37
κανονική αναπαράσταση, 25
κανονικό FG -πρότυπο, 25
κανονικό πρότυπο, 48
κεντροποιούσα υποομάδα, 6
κλάση συζυγίας, 6
ομάδα δρα, 2
ορθογώνιες σχέσεις γραμμών, 60
ορθογώνιες σχέσεις στηλών, 60
ορθοκανονικότητα αναγώγων
 χαρακτήρων, 54
- πίνακας χαρακτήρων, 60
πιστή αναπαράσταση, 16
πλήρες σύστημα αναγώγων
 $\mathbb{C}G$ -προτύπων, 45
προβολή, 28
πρότυπο, 16
πρότυπο μετάθεσης, 17
σταθεροποιούσα υποομάδα, 5
σταθερό σημείο δράσης, 8
σύνολο των σταθερών σημείων, 8
τετριμμένη αναπαράσταση, 14
τετριμμένο FG -πρότυπο, 17

τροχιά, 5

τύπος μετάθεσης, 9

χαρακτήρας, 47

χαρακτήρας του κανονικού προτύπου

$\mathbb{C}G$, 48

χαρακτήρας του προτύπου μετάθεσης,
48

χώρο των συναρτήσεων κλάσεων της

G , 57