

Συμμετρίες και Αναπαραστάσεις I  
Εργασία 2, μέχρι 1/06/2025

Ον/νο :

ΑΜ :

Ημ/ία :

Υλη Πρόχειρες σημειώσεις στην eclass Κεφ. 1 - 9. Από το βιβλίο [3] Κεφ. 3 - 16.

Στα παρακάτω  $G$  είναι πεπερασμένη ομάδα.

(1) (Πίνακας χαρακτήρων της  $S_4$ ) Δίνεται το ακόλουθο τμήμα του πίνακα χαρακτήρων της  $S_4$ .

$g_i$	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$ C(g_i) $	24	4	3	8	4
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	1	-1
$\chi_3$	2	0	-1	2	0
$\chi_4$					
$\chi_5$					

Βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων ως εξής.

- i ) Είδαμε στο Παράδειγμα 7.3(4) ότι ο τύπος  $\chi(\sigma) = |\text{fix}(\sigma)| - 1$  ορίζει χαρακτήρα της  $S_4$ . Υπολογίστε τον και δείξτε ότι είναι ανάγωγος χαρακτήρας.
- ii ) Θέτοντας  $\chi_4 = \chi$ , προσδιορίστε την τελευταία γραμμή με τη σχέσεις ορθογωνιότητας.
- (2) Δείξτε ότι η ομάδα  $S_3 \times S_3$  έχει μοναδικό ανάγωγο χαρακτήρα βαθμού 4. Έστω  $V$  το αντίστοιχο πρότυπο. Αληθεύει ότι το  $V \otimes V$  περιέχει  $\mathbb{C}G$ -υποπρότυπο ισόμορφο με το  $V$ ; Αληθεύει ότι  $(V \otimes V)^G = V^G \otimes V^G$ .
- (3) Δείξτε ότι μια ομάδα  $G$  είναι αβελιανή αν και μόνο αν κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της  $G$  έχει βαθμό 1.
- (4) Έστω  $H$  αβελιανή υποομάδα της  $G$ . Κάθε ανάγωγος χαρακτήρας της  $G$  έχει βαθμό  $\leq [G : H]$ .
- (5) Έστω  $\chi$  χαρακτήρας της  $G$  με  $\chi(g) = 0$  για κάθε  $g \in G - \{1\}$ . Τότε  $\chi = m\chi_{\text{reg}}$  για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο  $m$ , όπου  $\chi_{\text{reg}}$  είναι ο χαρακτήρας του κανονικού προτύπου  $G$ .
- (6) Έστω  $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  ανάγωγη αναπαράσταση με χαρακτήρα  $\chi$ . Δείξτε τα εξής.
  - i ) Για κάθε  $g \in Z(G)$ , υπάρχει  $\lambda_g \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $\rho(g) = \lambda_g I_n$ .
  - ii ) Για κάθε  $g \in Z(G)$ ,  $|\chi(g)| = n$ .
  - iii )  $n^2 \leq [G : Z(G)]$ .
- (7) (Άσκηση 10.M.15 του [2]) Έστω  $\rho : G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  αναπαράσταση βαθμού 2 τέτοια ώστε το 1 είναι ιδιοτιμή του  $\rho(g)$  για κάθε  $g \in G$ . Δείξτε ότι η  $\rho$  είναι το ευθύ άθροισμα δύο αναπαραστάσεων βαθμού 1.
- (8) Δείξτε ότι το πρότυπο μετάθεσης της  $S_n$  είναι ευθύ άθροισμα δύο αναγώνων προτύπων αν  $n \geq 2$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] Alperin, *Groups and Representations*, Springer, 1995.
- [2] Artin, *Algebra*, Pearson, 2010.
- [3] James and Liebeck, *Representations and characters of groups*, 2nd edition, Cambridge 2001.
- [4] Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups*, Springer 2012.

### Σχετικά με τις εργασίες

- Οι εργασίες είναι ατομικές. Μπορείτε να συνεργαστείτε, αρκεί να υπάρχει σχετική μνεία, πχ στην εργασία 1, πρόβλημα 4, συνεργάστηκα με την τάδε και το δείνα. Ενθαρρύνω συνεργασίες σε λογικά πλαίσια, αλλά μη μου παραδώσετε copy paste εργασίες, θα μηδενιστούν.
- Μπορείτε να αναρτήσετε τις εργασίες στην eclass ως αρχείο pdf. Μην τις στείλετε με email.
- Στο internet υπάρχουν πολλές λύσεις ασκήσεων. **Προσοχή.** Το νόημα των εργασιών είναι να μαθαίνουμε. Αναμένω αυτό που θα παρουσιάσετε γραπτώς να είναι με δική σας ανάπτυξη και να έχετε πλήρη κατανόηση των επιχειρημάτων και υπολογισμών. Αυτά πρέπει να αναγράφονται αναλυτικά.
- Πρέπει να αναγράφονται όλες οι εκφωνήσεις. Άσκηση 1, Λύση, Άσκηση 2, Λύση κλπ.
- Μπορούμε να συζητάμε εργασίες στην τάξη πριν την προθεσμία και οι σχετικές ερωτήσεις είναι, όπως πάντα, ευπρόσδεκτες.
- Εργασία σε Latex θα φτιάξει τη διάθεση κάθε στρυφνού διορθωτή :) Στην eclass θα αναρτηθεί το tex αρχείο της Εργασίας 1 και μια εισαγωγή στη latex γραμμένη από φοιτητές. Πολλοί βρίσκουν βοηθητικό το <https://www.overleaf.com/>