ΣΑΝ Ι
Εργασία 1, μέχρι 7/5/2025

Ον/νο :
ΑΜ :
Ημ/ία :

Ύλη Πρόχειρες σημειώσεις στην eclass Κεφ. 1 έως και Παράγραφο 7.1. Από το βιβλίο των James, Liebeck Κεφ. 3-11 και τις πρώτες δύο παραγράφους από Κεφ. 13.

(1) Δείξτε ότι κάθε δράση ομάδας τάξης 65 σε σύνολο 42 στοιχείων έχει τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία.

(2) (Θεώρημα του Wilson με δράσεις). Έστω p πρώτος, $\sigma \in S_p$ ο κύκλος $\sigma = (1\ 2\ \dots\ p)$ και G η κυκλική υποομάδα της S_p που παράγεται από τη σ. Θεωρήστε τη δράση της G στην κλάση συζυγίας $X = cl(\sigma)$ του στοιχείου σ στην S_n που δίνεται από συζυγία, $(\sigma^i, x) \mapsto \sigma^i x \sigma^{-i}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.13 των σημειώσεων, δείξτε ότι $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

(3) Θεωρούμε την ομάδα $G = C_4 \times C_2 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$ και τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Δείξτε ότι υπάρχει αναπαράσταση $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $\rho(a) = A,\ \rho(b) = B$.

ii) Είναι η ρ πιστή;

iii) Είναι η ρ ανάγωγη;

(4) (Αναπαραστάσεις κυκλικών ομάδων) Έστω n θετικός ακέραιος, $G = \langle g : g^n = 1_G \rangle$ κυκλική ομάδα τάξης n και $E_n = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\}$ το σύνολο των μιγαδικών n-στών ριζών της μονάδας. Για $\zeta \in E_n$ ορίζουμε $v_\zeta \in \mathbb{C}G$,

$$v_\zeta = 1 + \zeta g + \zeta^2 g^2 + \cdots + \zeta^{n-1} g^{n-1},$$

και $V_\zeta = \mathrm{span}\{v_\zeta\}$ τον υπόχωρο του $\mathbb{C}G$ που παράγεται από το v_ζ.

i) Δείξτε ότι το V_ζ είναι $\mathbb{C}G$-υποπρότυπο του $\mathbb{C}G$. Στη συνέχεια δείξτε ότι τα V_ζ, καθώς το ζ διατρέχει το σύνολο E_n, είναι ανά δύο μη ισόμορφα ανάγωγα $\mathbb{C}G$-υποπρότυπα.

ii) Δείξτε ότι $\mathbb{C}G = \bigoplus_{\zeta \in E_n} V_\zeta$.

iii) Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^2$ ως $\mathbb{C}G$-πρότυπο με δράση που ορίζεται από

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(γινόμενο πινάκων). Παραστήστε το V ως ευθύ άθροισμα δύο αναγώγων $\mathbb{C}G$-υποπροτύπων του.

iv) (Θα δούμε εδώ ότι η Πρόταση 5.6 γενικά δεν αληθεύει για το σώμα $\mathbb{R}$ στη θέση του $\mathbb{C}$.) Έστω $n = 3$. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $W = \mathbb{R}^2$ ως $\mathbb{R}G$-πρότυπο με δράση που ορίζεται όπως πριν. Δείξτε ότι το W είναι ανάγωγο $\mathbb{R}G$-πρότυπο.

(5) Έστω V ένα $\mathbb{C}G$ πρότυπο. Ορίζουμε το *υποπρότυπο των σταθερών σημείων*

$$V^G = \{v \in V : gv = v\ \forall g \in G\}$$

και την απεικόνιση

$$\theta : V \to V, v \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv.$$

i) Δείξτε ότι το V^G είναι $\mathbb{C}G$-υποπρότυπο του V και ότι η θ είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$-προτύπων.

ii) Δείξτε ότι η θ είναι προβολή (δηλαδή $\theta^2 = \theta$) και $\mathrm{Im}\theta = V^G$.

(6) Εδώ υποθέτουμε ότι G είναι η συμμετρική ομάδα S_3 και V είναι το πρότυπο μετάθεσης της G.

i) Βρείτε βάση του διανυσματικού χώρου V^G.

ii) Βρείτε $\mathbb{C}G$-υποπρότυπο του V, έστω U, έτσι ώστε $V = V^G \oplus U$.

iii) Βρείτε βάση και τη διάσταση του U.

iv) Δείξτε ότι τα V^G, U είναι ανάγωγα $\mathbb{C}G$-πρότυπα.

v) Υπολογίστε τη διάσταση του $\hom_{\mathbb{C}G}(V, V)$.

vi) Υπολογίστε το χαρακτήρα του U.

(7) Έστω V ένα $\mathbb{C}G$ πρότυπο έτσι ώστε υπάρχουν ανάγωγα $\mathbb{C}G$-υποπρότυπα V_1, V_2 του V με $V = V_1 \oplus V_2$.

i) Δείξτε ότι αν τα V_1, V_2 δεν είναι ισόμορφα, τότε τα $\mathbb{C}G$-υποπρότυπα του V είναι τα $\{0\}, V_1, V_2, V$.

ii) Δείξτε ότι αν τα V_1, V_2 είναι ισόμορφα, τότε υπάρχει $\mathbb{C}G$-υποπρότυπο του V διάφορο των V_1, V_2 αλλά ισόμορφο με τα V_1, V_2.

Σχετικά με τις εργασίες

- Οι εργασίες είναι ατομικές. Μπορείτε να συνεργαστείτε, αρκεί να υπάρχει σχετική μνεία, πχ στην εργασία 1, πρόβλημα 4, συνεργάστηκα με την τάδε και το δείνα. Ενθαρρύνω συνεργασίες σε λογικά πλαίσια, αλλά μη μου παραδώσετε copy paste εργασίες, θα μηδενιστούν.
- Μπορείτε να αναρτήσετε τις εργασίες στην eclass ως αρχείο pdf. Μην τις στείλετε με email.
- Στο internet υπάρχουν πολλές λύσεις ασκήσεων. Προσοχή. Το νόημα των εργασιών είναι να μαθαίνουμε. Αναμένω αυτό που θα παρουσιάσετε γραπτώς να είναι με δική σας ανάπτυξη και να έχετε πλήρη κατανόηση των επιχειρημάτων και υπολογισμών. Αυτά πρέπει να αναγράφονται αναλυτικά.
- Πρέπει να αναγράφονται όλες οι εκφωνήσεις. Άσκηση 1, Λύση, Άσκηση 2, Λύση κλπ.
- Μπορούμε να συζητάμε εργασίες στην τάξη πριν την προθεσμία και οι σχετικές ερωτήσεις είναι, όπως πάντα, ευπρόσδεκτες.
- Εργασία σε Latex θα φτιάξει τη διάθεση κάθε στρυφνού διορθωτή :) Στην eclass θα αναρτηθεί το tex αρχείο της Εργασίας 1 και μια εισαγωγή στη latex γραμμένη από φοιτητές. Πολλοί βρίσκουν βοηθητικό το https://www.overleaf.com/