Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές [Κεφ. 5 Ross]

- Πότε φτάνει το λεωφορείο στη στάση;
- Ποιό είναι το βάρος μιας φάλαινας;
- Πόσο ρεύμα διατρέχει έναν λαμπτήρα;

↳ Βασική διαφορά με τα προηγούμενα: Το σύνολο τιμών είναι συνεχές (Το $\mathbb{R}$ ή κάποιο υποδιάστημά του).

Ορισμός: Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathbb{P})$. Θα λέμε ότι η τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι (απολύτως) συνεχής όταν υπάρχει μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ τ.ω. $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$ Borel υποσύνολο $B \in \mathbb{R}$

ή ισοδύναμα:

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}}$$

Άλλος συμβολισμός $f_X(x)$

↳ Η συνάρτηση f θα καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.

Τέλος, ορίζουμε την λεγόμενη (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της X ως

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Παρατηρήσεις

1] Ο ορισμός δεν είναι απολύτως ακριβής γιατί δεν έχουμε μιλήσει για συνεχείς χώρους πιθανότητας.
Γι' αυτόν τον λόγο πρακτικά "ορίζουμε" την τ.μ. X μέσω της σ.π.π. f_X.

2] Σχέση με συνάρτηση μάζας πιθανότητας στις διακριτές.

- Σε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, κάθε τιμή μπορεί να έχει θετική πιθανότητα / μάζα που δίνεται από τη σ. μάζας πιθ/τας.

→ Μπορούμε να έχουμε $\mathbb{P}(X=x) > 0$ ↳ διακριτή
και $p(x) > 0$.

Αντιθέτως, σε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή έχουμε:

$$\underset{\substack{\text{συνεχής} \\ \forall x}}{\mathbb{P}(X = x)} = \mathbb{P}(x \leq X \leq x) = \int_x^x f_X(t)dt = 0$$

πυκνότητα ≠ μάζα

25.4.23

- Σε μια συνεχή τ.μ. $\boxed{\mathbb{P}(X=x)=0}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Η πιθανότητα παρατήρησης μιας οποιασδήποτε συγκεκριμένης τιμής είναι 0.

→ <u>Προσοχή!</u> Αν μας ενδιαφέρει μια περιοχή μεγέθους "ε" γύρω από το x, τότε έχουμε

$$\mathbb{P}(x-\varepsilon\leq X\leq x+\varepsilon)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(t)d(t)>0$$

↳ δυνατό να είναι θετικό!

- Με συμβολισμό Leibniz

(παράγωγος Radon-Nikodym)

$$\mathbb{P}(x\leq X\leq x+dx)=f(x)dx \iff \boxed{f(x)=\frac{d}{dx}\mathbb{P}(x\leq X\leq x+dx)}$$

- Αναφορικά με την αθροιστική κατανομή $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\mathbb{P}(X\leq x)$

προφανώς έχουμε $\boxed{F'(x)=\frac{dF}{dx}=f(x)}$

↳ Σύνδεση με τα προηγούμενα:

$$\mathbb{P}(x\leq X\leq x+dx)=F(x+dx)-F(x)=f(x)dx.$$

3] Αν $X:\underline{\Omega}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής τ.μ. τότε ο $\underline{\Omega}$ πρέπει να είναι υπεραριθμήσιμος.

<u>Γιατί;</u>: Αν $\underline{\Omega}$ αριθμήσιμος, τότε $X(\underline{\Omega})$ επίσης αριθμήσιμο ⇒

$$\int_{X(\underline{\Omega})}\cdots=0 \Rightarrow$$ δεν θα γινόταν να έχουμε σ.π.π.

Παραδείγματα Συνεχών τ.μ.

(* όλες οι κατανομές που θα μελετήσουμε είναι <u>παραμετρικές</u>)!

Οι κατανομές:
1. Ομοιόμορφη
2. Κανονική Γκαουσιανή
3. Εκθετική
4. Ειδικές: Gamma, Beta, Weibull

① <u>Ομοιόμορφη κατανομή</u>: $X\sim\mathcal{U}_{[a,b]}$ (unif[a,b]...)

"Ίδια πυκνότητα πιθανότητας σε κάθε σημείο του [a,b]"

→ $$\boxed{\underline{\Sigma\pi\pi}: f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x\notin[a,b]\\ \frac{1}{b-a} & \text{αν } x\in[a,b]\end{cases}}$$

· <u>Έλεγχος</u>: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$?

πράγματι: $$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b dx=1 \checkmark$$

→ Αθροιστική Κατανομή : 25.4.23

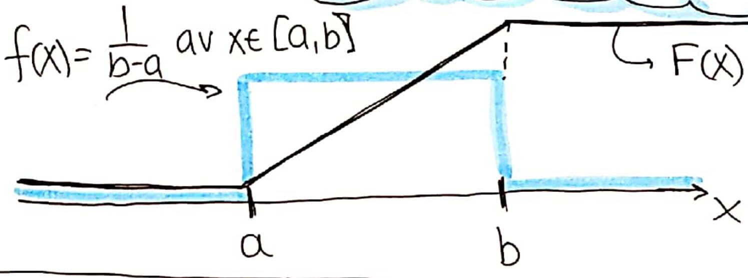
$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} 1\,dt = \frac{x-a}{b-a}$$

→ Αν $x<a \Rightarrow F(x)=0$

→ Αν $x>b \Rightarrow F(x)=1$

→ Αν $x\in[a,b] \Rightarrow$

Συνολικά : $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x\leq b \\ 1, & x\geq b \end{cases}$



Συμπεράσματα :
- f όχι πάντα συνεχής
- F πάντα συνεχής
- F πάντα αύξουσα

② Κανονική / Γκαουσιανή Κατανομή : $X \sim N(\mu,\sigma)$ "normal"

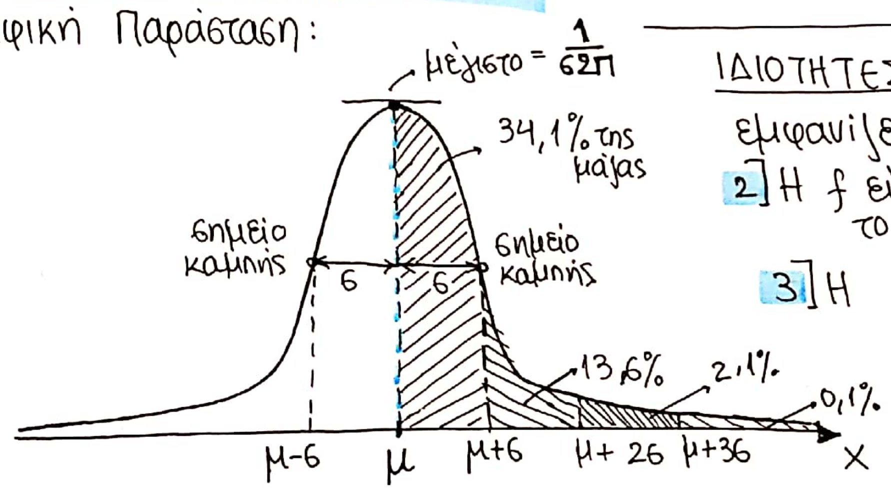
σ : παράμετρος διακύμανσης.

μ : παράμετρος θέσης

πχ) πόσο μακριά από τον στόχο του πέφτει ένα βέλος;

$$\boxed{\to \text{Σππ}: f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Γραφική Παράσταση :



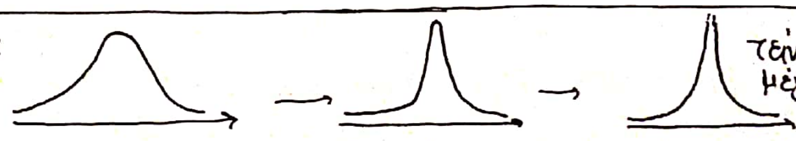
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ : 1] Το μέγιστο της f εμφανίζεται στο $x=\mu$ (μοναδικό)

2] Η f είναι συμμετρική ως προς το μ.

3] Η f εμφανίζει 2 σημεία καμπής στο $\mu\pm\sigma$

4] Η συνολική μάζα πιθανότητας σε διαστήματα της μορφής $[\mu-k\sigma, \mu+k\sigma]$ είναι ανεξάρτητη των μ,σ.

→ όσο το σ τείνει στο μηδέν :



τείνει το μέγιστο στο άπειρο.

25.4.23

Έλεγχος: Είναι η f σ.π.π.?

Δηλαδή έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$?

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \;\xrightarrow[dz=\frac{dx}{\sigma}]{z=\frac{x-\mu}{\sigma}}\; \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\cancel{\sigma}\,dz \overset{\text{ισχύει}}{\Longrightarrow} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \sqrt{2\pi}}$$

→ θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz$

Υπόθεση Laplace: $\mathbb{P}(r \leq \text{απόσταση από το κέντρο} \leq r+dr) = e^{-r^2/2}$

← στόχος και βολές

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2/2}\,dA = \int 2\pi r e^{-r^2/2}\,dr$$

$dA = E = \cancel{\pi r^2} + 2\pi r dr + \cancel{\pi (dr)^2} - \cancel{\pi r^2} \simeq 2\pi r dr$

Αν' αυτού:

θα υπολογίσουμε το επιφανειακό/διπλό ολοκλήρωμα: $\mathbb{R}^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy \; (= I^2) \rightsquigarrow \text{γεωμετρικά:}$$

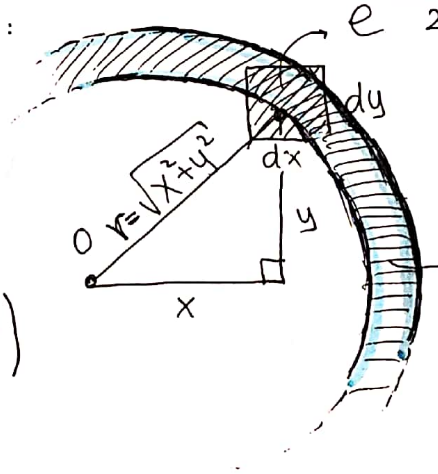
$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2/2}\,dA$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, 2\pi r\,dr = \left(\int r e^{-r^2/2}dr = e^{-r^2/2}\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}\,dr =$$

$$= -2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{2\pi}}$$

$e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$



→ $dA = 2\pi r dr$

εκθετική κατανομή ⟶ σελ. 5

3] Εκθετική Κατανομή : $X \sim \exp(\lambda)$

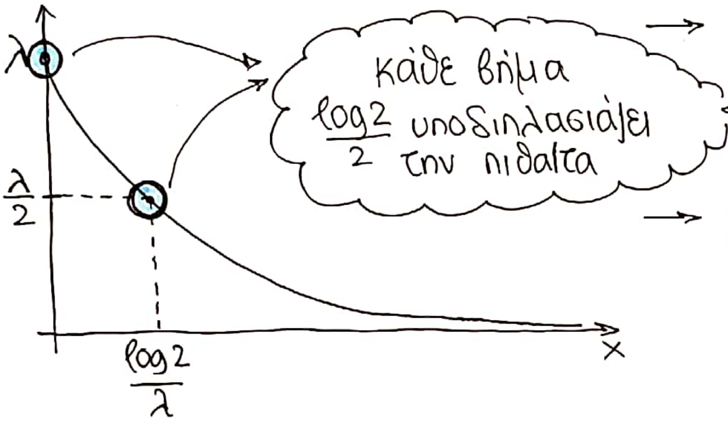
25.4.23

παράμετροι: λ (ρυθμός) [θετική]

πχ) "Ποιος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε 2 σεισμούς?"

" —"— στην άφιξη 2 επιβατών σε μια στάση λεωφορείου?"

→ Σ.π.π. $\boxed{f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \ x \geq 0}$



→ Ημιζωή: $\cancel{\lambda} e^{-\lambda x} = \cancel{\lambda}/2 \Rightarrow \lambda x = \log 2 \Rightarrow$

$x = \log 2 / \lambda$

→ Αθροιστική Κατανομή :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt \Rightarrow$$

$$F(x) = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^x \Rightarrow$$

$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0}$$