Μάθημα 14 – 06.04.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Μαίρη Αηδόνη – Δέσποινα Λίτσα

Πιθανότητες I

6/4/23

Ανακεφαλαίωση:

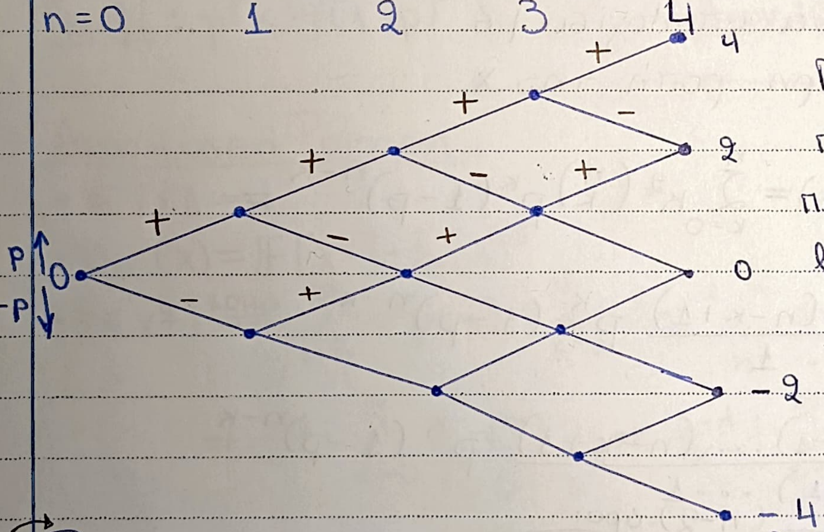
→ Μέσες Τιμές
- Γεωμετρική
- Αρνητική Διωνυμική

→ Διακύμανση
- Βασικές Ιδιότητες
- Παραδείγματα

→ Τυχαίοι Περίπατοι

[Όταν έχω δυαδική φύση, π.χ. (ισοπίθανα) 0 ή 1, επιτυχία ή αποτυχία, "+" ή "−", "πάνω" ή "κάτω" και αυτό να επαναλαμβάνεται συνεχώς πολλές φορές "πονηρευόμαστε" ότι είναι Διωνυμική κατανομή!]

Τυχαίος Περίπατος Επανάληψη:



Ποιά είναι η πιθανότητα ο περιπατητής να βρίσκεται στη θέση x μετά από n βήματα;

"κ επιτυχίες σε n δοκιμές" $\mathbb{P}(\kappa \text{ "+" βήματα σε } n \text{ βήματα}) = \binom{n}{\kappa} p^{\kappa} (1-p)^{n-\kappa}$

(Διωνυμική Κατανομή)

Όλα τα βήματα n, κ τα "+", άρα n-κ τα "−"

Η θέση x του περιπατητή μετά από κ "+" βήματα θα είναι:

$x = \kappa(+1) + (n-\kappa)(-1) = 2\kappa - n \iff \kappa = \dfrac{x+n}{2}$ θετικά βήματα

$\mathbb{P}$(θέση x σε n βήματα) $= \mathbb{P}\left(\frac{x+n}{2}\right.$ θετικά βήματα$\left.\right) =$

$$= \binom{n}{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ

→ Διακύμανση διωνυμικής κατανομής

$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, n ανεξαρτ. δοκιμές Bernoulli, $k \in \{0, \dots, n\}$

- $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$
- $Var(X) = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{\text{θέλουμε να υπολογίσουμε τη δεύτερη ροπή της X}} - \mathbb{E}[X]^2$

$$\mathbb{E}[X^2] \overset{LOTUS}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k-1)\dots 1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{(k-1)} n(n-1)}{\cancel{(k-1)}} \frac{\overbrace{(n-2)\dots(n-k+1)}^{(n-2) \text{ όροι}}}{(k-2)\dots 1} p^k (1-p)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} n \frac{\overbrace{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{(n-1) \text{ όροι}}}{(k-1)(k-2)\dots 1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-2)\dots 1} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} +$$

$$+ np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{(k-1)\dots 1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}p^l(1-p)^{n-2-l}}_{=1} + np\underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^l(1-p)^{n-1-l}}_{=1}$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$\mathbb{E}[X^2] = n(n-1)p^2 + np$$

$$\Rightarrow Var(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

<u>Poisson</u>: $p(k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ <u>Διων</u>: $p(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

<u>Γεωμ.</u>: $p(k) = (1-p)^{k-1}p$ <u>Αρνητ. Διων</u>: $p(k) = \binom{k+r-1}{k-1}(1-p)^k p^r$

<u>Διακύμανση Poisson</u>

- $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
- $\mathbb{E}[X^2] \overset{\text{λόγω}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{\cancel{k}(k-1)(k-2)\cdots 1}$

$$= e^{-\lambda}\lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)\cdots 1} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k-1+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{r=0}^{\infty}\overbrace{\frac{\lambda^r}{r!}}^{e^\lambda} + e^{-\lambda}\lambda\overbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}}^{e^\lambda}$$

$$= \cancel{e^{-\lambda}}\lambda^2\cancel{e^\lambda} + \cancel{e^{-\lambda}}\lambda\cancel{e^\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

$\Longrightarrow Var(x) = d^2 + d - d^2 = d$

Άσκηση: $\mathbb{E}[x^k] = ?$

Διακύμανση Γεωμετρικής Κατανομής

- $p(k) = (1-p)^{k-1} p$
- $\mathbb{E}[x] = \frac{1}{p}$
- $\mathbb{E}[x^2] \overset{LOTUS}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$

Σημείωση: αν $Y \sim NegBin(r,p)$ τότε:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) p^2 (1-p)^k = \frac{2(1-p)}{p} =$$

$$= p^2(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} + p^2 (1-p) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^{k-1}}_{\mathbb{E}[x] = \frac{1}{p}}$$

Συνοδικά, $p^2(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} + (1-p) = \frac{2(1-p)}{p} \Longrightarrow$

$$p^2 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} + 1 = \frac{2}{p} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{p \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}}_{\mathbb{E}[x^2]} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2} \Longrightarrow$$

$$\mathbb{E}[x^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Var(x) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}}$$