01/6/2023 πιθ. 1

Μάθημα 26 – 01.06.2023
Χρυσούλα Βαλίνου

Εφαρμογές ΚΟΘ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Ρίχνουμε 100 ζάρια (αμερόληπτα και ανεξάρτητα) κ' καλούμε $S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$ το άθροισμα των αποτελεσμάτων X_i, $i = 1, \ldots, 100$, κάθε ρίψης.

Έστω $\mu_{100} = \mathbb{E}[S_{100}]$ ο μέσος όρος αυτού του αθροίσματος.

① Να βρεθεί ο μέσος όρος και η διασπορά της S_{100}.

② Να βρεθεί προσεγγιστικά το μικρότερο διάστημα της μορφής $[\mu_{100} - a, \mu_{100} + a]$ ώστε $\mathbb{P}(|S_{100} - \mu_{100}| \leq a) \geq 0.99$.

ΛΥΣΗ:

① • Ο μέσος όρος της S_{100} είναι: $\boxed{\mu_{100} = \mathbb{E}[S_{100}] = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[X_i] = 350}$

• Η διασπορά της S_{100} είναι: $Var[S_{100}] = \sum_{i=1}^{100} Var[X_i] = 100 Var[X]$

• $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1 + \ldots + 6}{6} = 3{,}5$

• Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού.

• $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

διότι $\mathbb{E}[X^2] \underset{=}{\text{LOTUS}} \sum_{i=1}^{6} i^2 p(i) = \frac{1}{6}[1^2 + \ldots + 6^2] = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$

Τελικά $\boxed{Var[S_{100}] = \frac{3500}{12} \simeq 300}$, $\boxed{\sigma_{100} \cong 17}$

② Από Κ.Ο.Θ. θα έχουμε προσεγγιστικά ότι: $S_{100} \sim N\left(350, \frac{3500}{12}\right)$

Έστω $Z_{100} = \dfrac{S_{100} - \mu_{100}}{\sigma_{100}} = \dfrac{S_{100} - 350}{\sqrt{\frac{3500}{12}}}$

Από Κ.Ο.Θ. γνωρίζουμε ότι προσεγγιστικά θα ισχύει:

$Z_{100} \sim N(0,1)$

Άρα: $\mathbb{P}(|S_{100} - \mu_{100}| \leq a) = \mathbb{P}\left(|Z_{100}| \leq \dfrac{a}{\sigma_{100}}\right) \overset{Z_{100} \sim N(0,1)}{=\!=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-a/\sigma_{100}}^{a/\sigma_{100}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \displaystyle\int_0^{a/\sigma_{100}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{a/\sigma_{100}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \dfrac{1}{2}\right] = 0{,}99$

Άρα αναζητούμε a τ.ω. το $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{a/\sigma_{100}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dfrac{0{,}99}{2} + \dfrac{1}{2} = 0{,}995$

$= \Phi(2{,}57)$

$\Rightarrow$ Από τον πίνακα της Φ προκύπτει ότι: $\dfrac{a}{\sigma_{100}} \cong 2{,}57$.

$\Rightarrow a \cong 2{,}57 \cdot \sigma_{100} = 25{,}7 \cdot \sqrt{3} \cong 44{,}5$

Δική μου σκέψη για το 2, χρησιμοποιώντας μόνο το Κ.Ο.Θ. και τα Φ, γιατί μπερδεύτηκα με τον τελευταίο μετασχηματισμό του ολοκληρώματος.

$$\mathbb{P}(|S_{100}-\mu_{100}| \leq a) \geq 0.99 \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_{100}-\mu_{100}|}{\sigma_{100}} \leq \frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 0.99 \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(|Z_{100}| \leq \frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 0.99 \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{a}{\sigma_{100}}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 0.99 \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 0.99 \xRightarrow{\Phi(-z)=1-\Phi(z)}$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 0.99 \Rightarrow$$

$$2\Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 1.99 \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq \frac{1.99}{2} \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq 0.995 \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma_{100}}\right) \geq \Phi(2,57) \Rightarrow$$

$$\frac{a}{\sigma_{100}} \geq 2,57 \Rightarrow$$

$$a \geq 2,57 \cdot \sigma_{100} \simeq 44,5$$