Μάθημα 22 – 18.05.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Χρυσούλα Βαλίνου (Σετ 1)
Βασιλική Μαυρογεώργου (Σετ 2)

$\Rightarrow$ ΠΡΟΣΟΧΗ:

① Το κριτήριο της Πρότασης 2 δεν εφαρμόζεται

② Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

18/10/2023 Παραδείγματα (Στοχαστική Ανεξαρτησία/ Από κοινού κατανομή)

Παραλλαγή (2η) (Ross):

Πρόλογος:

Έστω X, Y ομοιόμορφες στο $[0,1]$ κ' $X \perp\!\!\!\perp Y$
ποιά η πιθανότητα να έχουμε $X \geq Y$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \geq Y(\omega)\}$

Χωρίο πιθανότητας:

$$D = \{(x,y) : x \geq y \, , 0 \leq x, y \leq 1\}$$
$$= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \, , 0 \leq y \leq x\}$$

- $$\mathbb{P}(X \geq Y) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \iint_D \overbrace{f_X(x)}^{=1} \cdot \overbrace{f_Y(y)}^{=1}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x dy\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

Β' τρόπος:

$$\mathbb{P}(X \geq Y) \overset{\text{από συμμετρία}}{=} \mathbb{P}(Y \geq X)$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(Y \geq X)}_{p}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq X) + \mathbb{P}(X \geq Y) = 1$$

$$\| $$

$$2p = 1 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

Παραλλαγή (2η) Ross:

Έστω $X, Y, Z \sim \mathcal{U}[0,1]$ κ' ανεξάρτητες $(X, Y, Z) \perp\!\!\!\perp$

① Να υπολογισθεί η $\mathbb{P}(Z > X \cdot Y)$

② Να υπολογισθεί η $\mathbb{P}(Z > X + Y)$

① $\mathbb{P}(Z > X \cdot Y)$

Χωρίο πιθανότητας: $D = \{(x,y,z) : z > x \cdot y \ , \ 0 \leq x, y, z \leq 1\}$

$= \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ x \cdot y \leq z \leq 1\}$

$$\mathbb{P}(Z > X \cdot Y) = \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \overset{(X,Y,Z) \perp\!\!\!\perp}{=\!=\!=} \iiint_D \underbrace{f_X(x)}_{1} \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{1} \cdot \underbrace{f_Z(z)}_{1}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_D dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_{xy}^1 dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 [1 - xy]\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left[1 - \frac{x}{2}\right] dx = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

② $\mathbb{P}(Z > X+Y)$

<u>Χωρίο πιθανότητας:</u> $D = \{(x,y,z) : z > x+y \, , \; 0 \leq x,y,z \leq 1\}$

$$D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1 \, , \; 0 \leq y \leq 1 \, , \; x+y \leq z \leq 1\}$$

$$\mathbb{P}(Z > X+Y) = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \overset{(X,Y,Z)_{\perp\!\!\perp}}{=\!=}$$

$$= \iiint_D \underbrace{f_X(x)}_{1} \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{1} \cdot \underbrace{f_Z(z)}_{1}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_D dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_{x+y}^1 dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 [1-x-y]\,dy\,dx =$$

$$= 1 - \int_0^1 \int_0^1 x\,dx - \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 y\,dy\,dx}_{1-2\cdot\frac{1}{2}} = 0$$

! Αυτός ο τρόπος υπολογισμού είναι <u>λάθος</u>,

διότι υπάρχει πρόβλημα στο χωρίο πιθανότητας.
Δηλαδή μπορεί $x+y > 1$.

ΛΑΘΟΣ!

$D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1 \, , \; 0 \leq y \leq 1 \, , \; \cancel{x+y \leq} \, z \leq 1\}$

Σωστός τρόπος:

Για τις πράξεις με βοηθάει καλύτερα να υπολογίσω το $\mathbb{P}(Z < X+Y)$.

• $D = \{ (x,y,z) : 0 \leq x,y,z \leq 1,\ z \leq x+y \}$

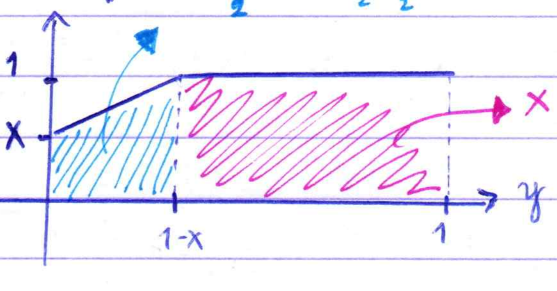
$= \{ (x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq \min\{1, x+y\} \}$

• $\mathbb{P}(Z < X+Y) = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\min\{1,x+y\}} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\min\{1, x+y\}}\,dy\,dx$$

$$\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$$



$$= \int_0^1 \min\{1, x+y\}\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2} + \underbrace{x}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(Z < X+Y) = \frac{5}{6}}$$

Συνεπώς: $\boxed{\mathbb{P}(Z > X+Y) = \frac{1}{6}}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ Τ.Μ.

1. $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

2. $\mathbb{E}[g(X) \cdot h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)] \cdot \mathbb{E}[h(Y)]$

3. $\mathbb{V}ar[X+Y] = \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y]$

! **ΠΡΟΣΟΧΗ:**

Στα παραπάνω υποθέτουμε ότι $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Χωρίς αυτήν την υπόθεση, δεν ισχύουν εν γένει οι ιδιότητες

Απόδειξη:

1. Για την συνεχή περίπτωση, η διακριτή όμοια.

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] \overset{LOTUS}{=\!=} \iint x\, y\, f(x,y)\, dx\, dy \overset{X,Y \perp\!\!\!\perp}{=\!=} \iint x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot x\, dx \cdot \int f_Y(y) \cdot y\, dy$$

$$= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Έστω X τ.μ., $\mathbb{E}[X]=0$.

"Εφαρμόζουμε" την ιδιότητα του γινομένου για X, $Y \leftarrow X$

$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = 0$ προφανώς χωρίς νόημα.

③ $Var(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2$

$$= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] - [\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]]^2$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X^2]} + 2\mathbb{E}[XY] + \underbrace{\mathbb{E}[Y^2]} - \underbrace{\mathbb{E}[X]^2} - \underbrace{\mathbb{E}[Y]^2} - 2\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,[\mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]]$$

0

$$= Var[X] + Var[Y]$$

ΔΕΣΜΕΥΣΗ Τ.Μ.

Θυμόμαστε ότι η δέσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A δοθέντος του B είναι:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \quad , \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

→ Στη διακριτή περίπτωση:

από κοινού σ.μ.π.

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)} = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\underbrace{\mathbb{P}(Y=y)}}$$

περιθώρια της Y

Δεσμευμένη σ.μ.π. της X δοθέντος του Y.

Ορισμός:

Έστω διακριτές τ.μ. X, Y.
Η δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X ως προς Y ορίζεται ως: $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

οποτεδήποτε έχουμε $p_Y(y) > 0$.

→ Στη συνεχή περίπτωση

Ορισμός:

Έστω συνεχείς τ.μ. X, Y.
Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X ως προς Y ορίζεται:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \ f_Y(y) > 0$$

◇ Ερμηνεία ορισμού στη συνεχή περίπτωση:

$$\mathbb{P}(x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy) = \frac{\mathbb{P}(x \le X \le x+dx,\ y \le Y \le y+dy)}{\mathbb{P}(y \le Y \le y+dy)}$$

$$\Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y)\cancel{dx} = \frac{f(x,y)\cdot \cancel{dx}\,\cancel{dy}}{f_Y(y)\,\cancel{dy}}$$

Παράδειγμα 1 (5β Ross):

Έστω συνεχείς τ.μ. X, Y με από κοινού σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y} & , x,y>0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθεί η $\mathbb{P}(X>1 \mid Y=y)$

Λύση:

$$\mathbb{P}(X>1 \mid Y=y) = \int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

∘ <u>Υπολογισμός περιθώριας:</u> $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/y} \cdot e^{-y}}{y}\, dx = -e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}} \Big|_0^{+\infty} = e^{-y}$$

∘ <u>Υπολογισμός δεσμευμένης:</u>

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} \cdot \cancel{e^{-y}}/y}{\cancel{e^{-y}}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

∘ <u>Υπολογισμός πιθανότητας:</u>

$$P(X>1 \mid Y=y) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x/y}}{y}\, dx = -e^{-x/y} \Big|_1^{+\infty} = e^{-\frac{1}{y}}$$

Παράδειγμα: ΔΙΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

(Binormal Distribution)

Από κοινού κατανομή 2 τυχαίων κανονικών τ.μ.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(-y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

- Αν X, Y ανεξάρτητες:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}$$

Η Δικανονική κανονική κατανομή περιγράφει μη-ανεξάρτητα ζεύγη κανονικών τ.μ.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right. \right.$$

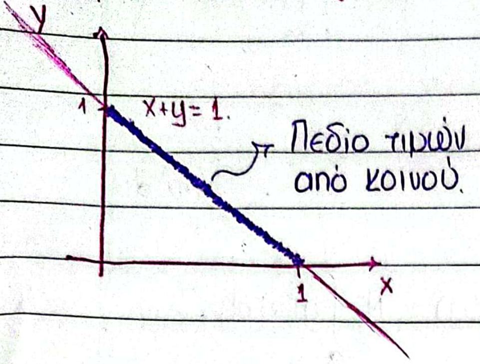
$$\left. \left. - 2r \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \right] \right\}$$

Αν $X, Y \sim Binormal(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, r)$

→ Περιθώριες: $f_X(x)$, $f_Y(y)$

→ $f_{X|Y}(x|y)$

Περίπτωση 2: $f(x,y) = 6e^{-2x}e^{-3y}$, $x,y>0$, , $x+y=1$. Ερώτηση: $X \perp\!\!\!\perp Y$?



Στην πραγματικότητα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν θα προκύψει να είναι

$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$, αλλά $f(x,y)=0$ οποτεδήποτε $x+y \neq 1$

$\Rightarrow$ ΠΡΟΣΟΧΗ! ① Το κριτήριο της πρότασης 2 δεν εφαρμόζεται

② Οι X, Y όχι ανεξάρτητες.

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Παραδείγματα (στοχαστική ανεξαρτησία / από κοινού κατανομή)

Παραλλαγή Ross (2η):

$X \sim U(0,1)$

$X = Y \sim U(0,1)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Διότι ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ (Ή ΜΗ) μεταξύ των τ.μ.

Πρόλογος: Έστω X, Y ομοιόμορφες στο $[0,1]$ & $X \perp\!\!\!\perp Y$ ανεξάρτητες.
Ποια η πιθανότητα να έχουμε $X \geq Y$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \geq Y(\omega)\})$

Χωρίο πιθανότητας: $\mathcal{D} = \{(x,y) : x \geq y,\ 0 \leq x,y \leq 1\} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

Άρα $\mathbb{P}(X \geq Y) = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \iint_{\mathcal{D}} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} 1 \cdot 1\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 \int_0^x dy\,dx = \int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

από συμμετρία

β' τρόπος : $\underbrace{\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(Y \geq X)}_{P}$

$$\mathbb{P}(X \geq Y) + \mathbb{P}(Y \geq X) = 1$$

$$2P = 1$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}}$$

Παραλλαγή Ross (2n): Έστω $X, Y, Z \sim \mathcal{U}[0,1]$ κ' ανεξάρτητες $(X,Y,Z)_{\perp\!\!\perp}$.

① Να υπολογισθεί η $\mathbb{P}(Z > XY)$.

② Να υπολογισθεί η $\mathbb{P}(Z > X+Y)$.

① $\mathbb{P}(Z > X \cdot Y) =$

Χωρίο ΠΙΟ: $\mathcal{B} = \{(x,y,z) : z > x \cdot y,\ 0 \leq x,y,z \leq 1\} = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \cdot y \leq z \leq 1\}$

$$\boxed{\mathbb{P}(Z > XY)} = \iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \overset{(X,Y,Z)_{\perp\!\!\perp}}{=} \iiint_{\mathcal{B}} f_X(x) f_Y(y) f_Z(z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{\mathcal{B}} 1 \cdot 1 \cdot 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{B}} dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_{xy}^1 dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 1 - xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 1 - \frac{x}{2}\,dx = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

② $P(Z > X+Y)$ Χωρίο ΠΙΟ: $\mathcal{B} = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq z \leq 1\}$

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{B}} f_X(x) f_Y(y) f_Z(z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{B}} dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_{x+y}^1 dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 1-x-y \; dy\,dx = 1-\int_0^1 x\,dx - \int_0^1\int_0^1 y\,dy\,dx = 0$$

(ΕΣΚΕΜΜΕΝΟ ΛΑΘΟΣ... ΕΠΑΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ).

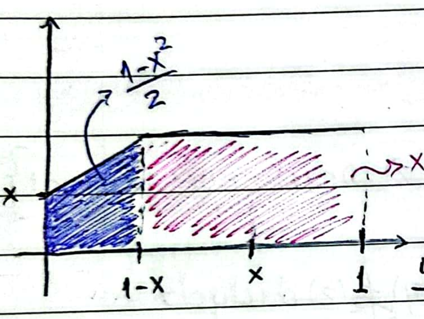
όρια ολοκλήρωσης προσοχή!

② $\mathbb{P}(Z>X+Y)$. Βολεύει να υπολογίσω $\mathbb{P}(Z<X+Y)$

Χωρίο πιθ: $\mathcal{B}=\{(x,y,z): x+y\le z,\ 0\le x,y,z\le 1,\ z\le x+y\}$

$$=\{(x,y,z): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ \min\{x+y,1\}\ge z\ge 0\}$$

$$\mathbb{P}(Z<X+Y) = \iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^{\min\{x+y,1\}} dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 \min\{1,x+y\}\,dy\,dx$$



$$\int_0^1 \min\{1,x+y\}\,\cancel{dx}\,dy = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+x\,dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6} = \boxed{1-\frac{1}{6}}$$

Άρα $\boxed{\mathbb{P}(Z>X+Y) = 1/6}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ Τ.Μ.

1) $E[X\cdot Y] = E[X]\cdot E[Y]$
2) $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\cdot E[h(Y)]$
3) $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! ΕΧΟΥΜΕ ΥΠΟΘΕΣΕΙ ότι $X \perp\!\!\!\perp Y$. Χωρίς αυτήν την υπόθεση, οι ιδιότητες εν γένει δεν ισχύουν.

Απόδειξη: (Για τη συνεχή περίπτωση / η διακριτή εντελώς ανάλογη).

① $E[XY] \overset{\text{LOTUS}}{=} \iint x\cdot y \cdot f(x,y)\,dx\,dy \overset{\boxed{X \perp Y}}{=} \iint xy f(x) f(y)\,dx\,dy =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = E[X]\cdot E[Y].$$

(② ΑΣΚΗΣΗ)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Έστω τ.μ. X, $E[X]=0$
Εφαρμόζουμε την ιδιότητα στις τ.μ. X,
$Y \leftarrow X$. $E[X\cdot X] = E[X^2]$
$E[X]\cdot E[X] = 0$ ΠΡΟΦΑΝΩΣ
ΑΝΕΥ ΝΟΗΜΑΤΟΣ!

③ $Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E[X+Y]^2$

$$= E[X^2+2XY+Y^2] - [E[X]+E[Y]]^2 = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2]$$
$$- E^2[X] - 2E[X]E[Y] - E^2[Y] \overset{①}{=}$$
$$E[X^2] + 2\cancel{E[X]E[Y]} + E[Y^2] - E^2[X] - \cancel{2E[X]E[Y]} - E^2[Y] =$$
$$= Var(X) + Var(Y).$$

Δεσμευμένη τ.μ.

Θυμόμαστε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B είναι $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$, δεδομένου ότι $\mathbb{P}(B)>0$

⇝ Στη διακριτή περίπτωση: Έστω τ.μ. X, Y.

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)}_{\text{δεσμευμένη σ.μ.π. της } X \text{ δοθείσης } Y} = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

⇝ από κοινού σ.μ.π

↳ περιθώρια της Y

Ορισμός: Έστω (διακριτές) τ.μ. X, Y. Τότε, η δεσμευμένη σ.μ.π της X ως προς Y ορίζεται ως $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$, οποτεδήποτε $p_Y(y)>0$

Έστω συνεχείς τ.μ. X, Y. Η δεσμευμένη σ.π.π. της X ως προς Y ορίζεται ως $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, οποτεδήποτε $f_Y(y)>0$.

Ερμηνεία Οριακά στη συνεχή περίπτωση

$$\mathbb{P}(x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy) = \frac{\mathbb{P}(x\le X\le x+dx,\ y\le Y\le y+dy)}{\mathbb{P}(y\le Y\le y+dy)}.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f_{X|Y}(x|y)\,\cancel{dx} = \frac{f(x,y)\,\cancel{dx}\,\cancel{dy}}{f_Y(y)\,\cancel{dy}}$$

| Radon Nikodym (Κανόνας Αλυσίδας).

Παράδειγμα 1 (Ross 5β): Έστω συνεχείς τ.μ. X, Y με από κοινού σππ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & x,y>0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθεί η $\mathbb{P}(X>1 \mid Y=y)$.

<u>Λύση</u>: $\mathbb{P}(X>1 \mid Y=y) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx.$

<u>Υπολογισμός περιθώριας</u>:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/y}\cdot e^{-y}}{y}\,dx = -e^{-y}\cdot e^{-x/y}\Big|_0^{+\infty} = e^{-y}.$$

Άρα $f_Y(y) = -e^{-y}.$

Υπολ. δεσμευμένης: $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{\frac{e^{-x/y}\cdot e^{-y}}{y}}{-e^{-y}} = \dfrac{1}{y}\cdot e^{-\frac{1}{y}\cdot x}$

$$\mathbb{P}(X>1 \mid Y=y) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}x}\,dx = e^{-\frac{1}{y}}$$

Παράδειγμα: Δικανονική Κατανομή (Binormal Distribution)

Από κοινού κατανομή δύο κανονικών τ.μ.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\cdot e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

⤳ Αν οι X, Y ανεξάρτητες, τότε:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\cancel{2}\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\cancel{2}\sigma_y^2} \right]\right\}$$

⤳ Η Δικανονική Κατανομή περιγράφει μη ανεξάρτητα ζεύγη κανονικών τ.μ.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\cancel{2}\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r\cdot\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right]\right\}$$