Ανακεφαλαίωση

- → Κατανομές διακριτών τ.μ
- → Μέση Τιμή
- → Ιδιότητες
- → Υπολογισμός: + Poisson + Διωνυμική

Σήμερα

- + Γεωμετρική + Αρνητική Διωνυμική
- → Διακύμανση
  - + Ιδιότητες + Υπολογισμός

• Υπολογισμός Μέσης Τιμής Γεωμετρικής τ.μ.

Σμπ: $p(k) = (1-p)^k p$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \quad (*)$$

* Υπολογισμός μέσω γεννήτριας συνάρτησης

(*) → Παράγωγος του $(1-p)^k$ ως προς $x = 1-p$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση που κρύβεται μέσα από τη σχέση $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$ → γεννήτρια συνάρτηση

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}}$

Γεννήτρια Συνάρτηση

1. Εκφράζουμε τη σειρά ως παράγωγο μιας άλλης σειράς
2. Αν είμαστε τυχεροί, η δεύτερη σειρά υπολογίζεται σε κλειστή μορφή
3. Παραγωγίζουμε την κλειστή μορφή

→ Επιστρέφοντας στην (*) θέτουμε $x \leftarrow 1-p$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbb{E}[X] = p\,\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}}$$

Μάθημα 13 – 04.04.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Ζωή Μπαλούτσου
Μαρία Προτσένκο

• Υπολογισμός Μέσης Τιμής Αρνητικής Διωνυμικής

Σμπ: $p(k)=\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k$

• Θα κάνουμε την ειδική περίπτωση $r=2$ (δεν κάνουμε την $r=1$ γιατί είναι η γεωμ. κατ.)

$\rightsquigarrow p(k)=\binom{k+1}{1}p^2(1-p)^k=(k+1)p^2(1-p)^k$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=0}^{\infty}k\,p(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k+1)p^2(1-p)^k=p^2(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}\underline{k(k+1)(\overset{x}{\widetilde{1-p}})^{k-1}}\quad (*)$$

$k(k+1)x^{k-1} \rightsquigarrow$ 2η παράγωγος του x^{k+1}

$\left[x^{k+1}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}(k+1)x^k\xrightarrow{\frac{d}{dx}}k(k+1)x^{k-1}\right]$

$k(k+1)\ldots(k+r-1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$
(για $x\in(0,1)$)

Τότε έχουμε: $f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$

r-οστή παράγωγο

$$f''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}\xrightarrow{k-1=\ell}f''(x)=\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell+1)\ell x^{\ell-1}$$

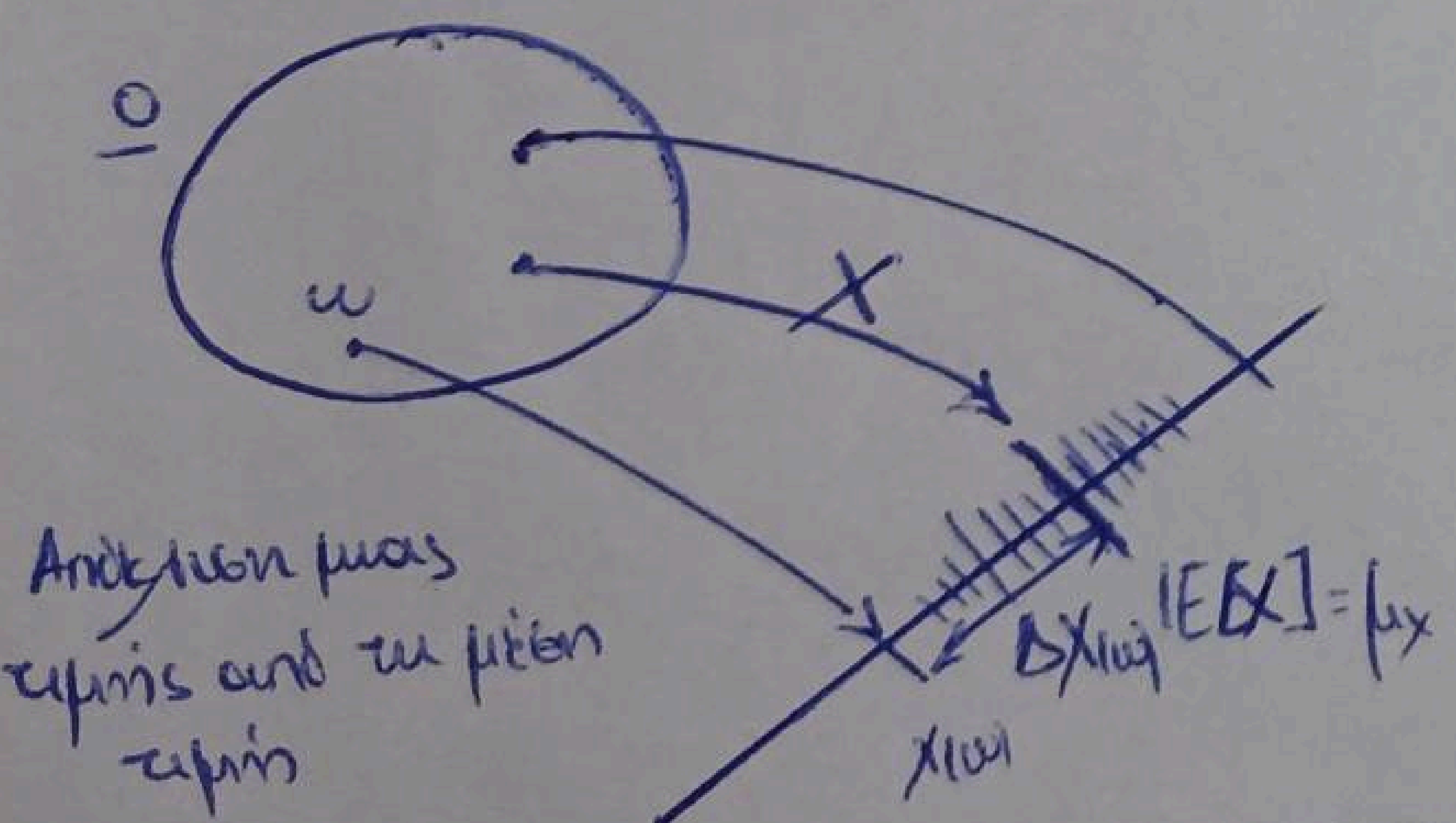
k	0	∞
ℓ	1	∞

r αντί για 2

Όμως $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\Longrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}k(k+1)x^{k-1}=\frac{2}{(1-x)^3}$ $3\rightsquigarrow r+1$ $\to r$

→ Επιστρέφουμε στην (*) θέτουμε $x\leftarrow 1-p$ Οπότε $\boxed{\mathbb{E}[X]=p^2(1-p)\cdot\frac{2}{p^3}=\frac{2(1-p)}{p}}$

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ



$\boxed{\Delta X(\omega)=X(\omega)-\mu}$

1η ιδέα μέτρησης "διασποράς": $\mathbb{E}[\Delta X]=\mathbb{E}[X-\mu]\equiv 0$

2η σκέψη: ⇝ Απόλυτη απόκλιση $|\Delta X|=|X-\mu|$

Διασπορά $=\mathbb{E}[|\Delta X|]=\mathbb{E}[|X-\mu|]$

Αυτός ο ορισμός έχει νόημα αλλά στην πράξη είναι καλύτερο να δουλεύουμε με την τετραγωνική απόκλιση

• Ορισμός ⇒ Έστω (διακριτή) τ.μ. X. Ως διακύμανση (ή διασπορά) της X ορίζεται η ποσότητα

Variance ⟶ $\boxed{Var(X)=\mathbb{E}[|X-\mu|^2]}$ όπου $\mu=\mathbb{E}[X]$ η μέση τιμή της X.

Ορισμός ⇒ Η τυπική απόκλιση της X ορίζεται ως $\boxed{\sigma_X := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}}$ Root Mean Square

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

(1) $Var(X) = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{2^{\eta}\ \text{ροπή}} - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{1^{\eta}\ \text{ροπή}}^2$ ("Μέση τιμή τετραγώνου ≥ Τετράγωνο Μέσης Τιμής")

(2) $Var(aX) = a^2 Var(X)$

(3) $Var(X) = 0 \iff X$ είναι σταθερή [$\exists a: X(\omega) = a$ με πιθ. 1]

Θυμίζει: $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Απόδειξη της (1)

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mu X] + \mathbb{E}[\mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu} + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Παράδειγμα: Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Να υπολογισθεί η $Var(X)$

Λύση

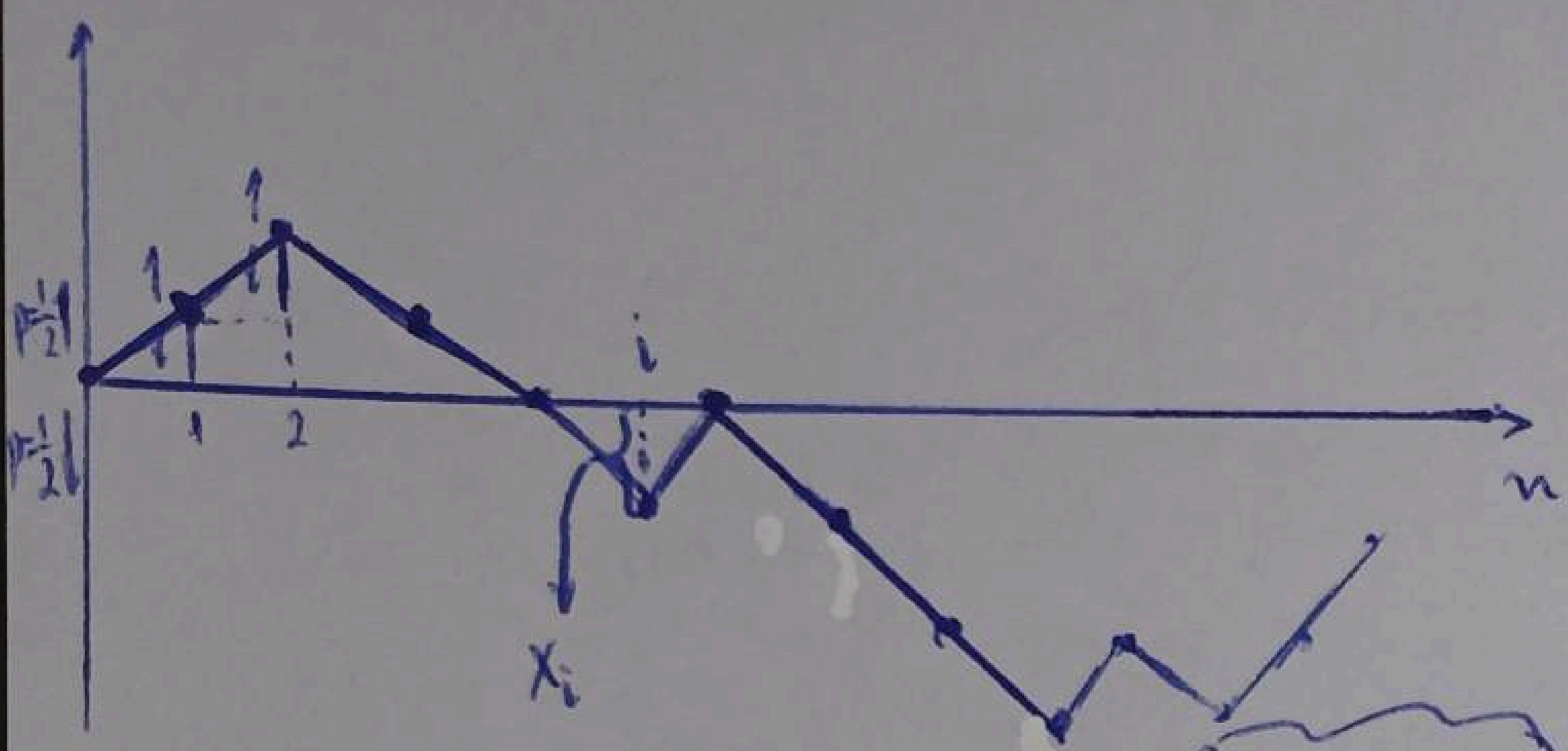
Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$, οπότε ~~[illegible]~~ από την ιδιότητα (1) αρκεί να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{6} k^2 p(k) \Rightarrow$ (LOTUS)

k	1	2	3	4	5	6
k^2	1	4	9	16	25	36
$p(k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

Οπότε $Var(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ



Ένας μεθυσμένος κινείται πάνω (+1) ή κάτω (−1) με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Αν S_n η θέση του μεθυσμένου μετά από n βήματα τότε να υπολογισθούν τα εξής:

(1) $\mathbb{E}[S_n]=;$

(2) Αν $X_i \in \{-1,1\}$ το i-στό βήμα νδο $\mathbb{E}[X_iX_j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}$ → ενδιάμεσο ερώτημα

(3) $\mathbb{E}[S_n^2]=;$

(4) $Var(S_n)=;$

(5) Διακύμανση μέσου όρου $\underbrace{\text{μ.ο.}}$ $\bar{X}_n = \frac{1}{n}S_n =;$

Επεξήγηση: Έστω X_i το i-στό βήμα του μεθυσμένου. Τότε $X_i = \begin{cases} +1 & \text{με πι} \\ -1 & \text{με πι} \end{cases}$

Λύση

θέση τη στιγμή n

βήματα τη στιγμή k

Με βάση την εκφώνηση έχουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k}$

$\mathbb{E}[X_i] = 1\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0$

(1) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_i\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$

[Πρωθύστερα: $S_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k \sum_{l=1}^{n} X_l = \sum_{k,l=1}^{n} X_k X_l$] (*)

(2)

$X_j \backslash X_i$	−1	+1
−1	$\frac{1}{4}\cdot 1$	$\frac{1}{4}(-1)$
+1	$\frac{1}{4}(-1)$	$\frac{1}{4}\cdot 1$

$i \neq j$

- Αν $i\neq j$, τότε $\mathbb{E}[X_iX_j] = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$
- Αν $i=j$, τότε $X_iX_j = X_i^2 = 1$ πάντα $\Rightarrow \mathbb{E}[X_iX_j]=1$ αν $i=j$

Συνοπτικά, έχουμε $\mathbb{E}[X_iX_j] = \delta_{ij} \left(= \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}\right)$

δ Kronecker

(3) $\mathbb{E}[S_n^2] \overset{(*)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} X_iX_j\right] = \sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}[X_iX_j] = \sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\delta_{ii}}_{1} = n$

(4) $Var(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - \cancel{\mathbb{E}[S_n]^2}^{0} = n \rightarrow$ Τυπική απόκλιση της $S_n \sim \sqrt{n}$

(5) Αν $\bar{X}_n = \frac{1}{2}S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ τότε (i) $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\cancel{\mathbb{E}[S_n]}^{0} = 0$ και (ii) $Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}Var(S_n) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Ανακεφαλαίωση Μέσης Τιμής.

Διωνυμική Κατανομή $(X \sim Bin(n,p))$

$p(x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$E[X] = np.$

Poisson $(X \sim Poisson(\lambda))$

$p(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$

$E[X] = \lambda.$

Γεωμετρική $(X \sim Geom(p))$

$p(i) = p(1-p)^{i-1}$

$E[X] = \frac{1}{p}.$

Αρνητική Διωνυμική $(X \sim NegBin(r,p)).$

$p(i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$

$E[X] = \frac{r}{p}.$

Υπεργεωμετρική

$p(i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$ $\quad i = 0, \dots, m$

$p = \frac{m}{N}.$

$E[X] = np.$

Στην ανέχεια θα δούμε και το $Var[X]$.